幸せ物語 2011
第 4 話　数学の力とは (1)

****

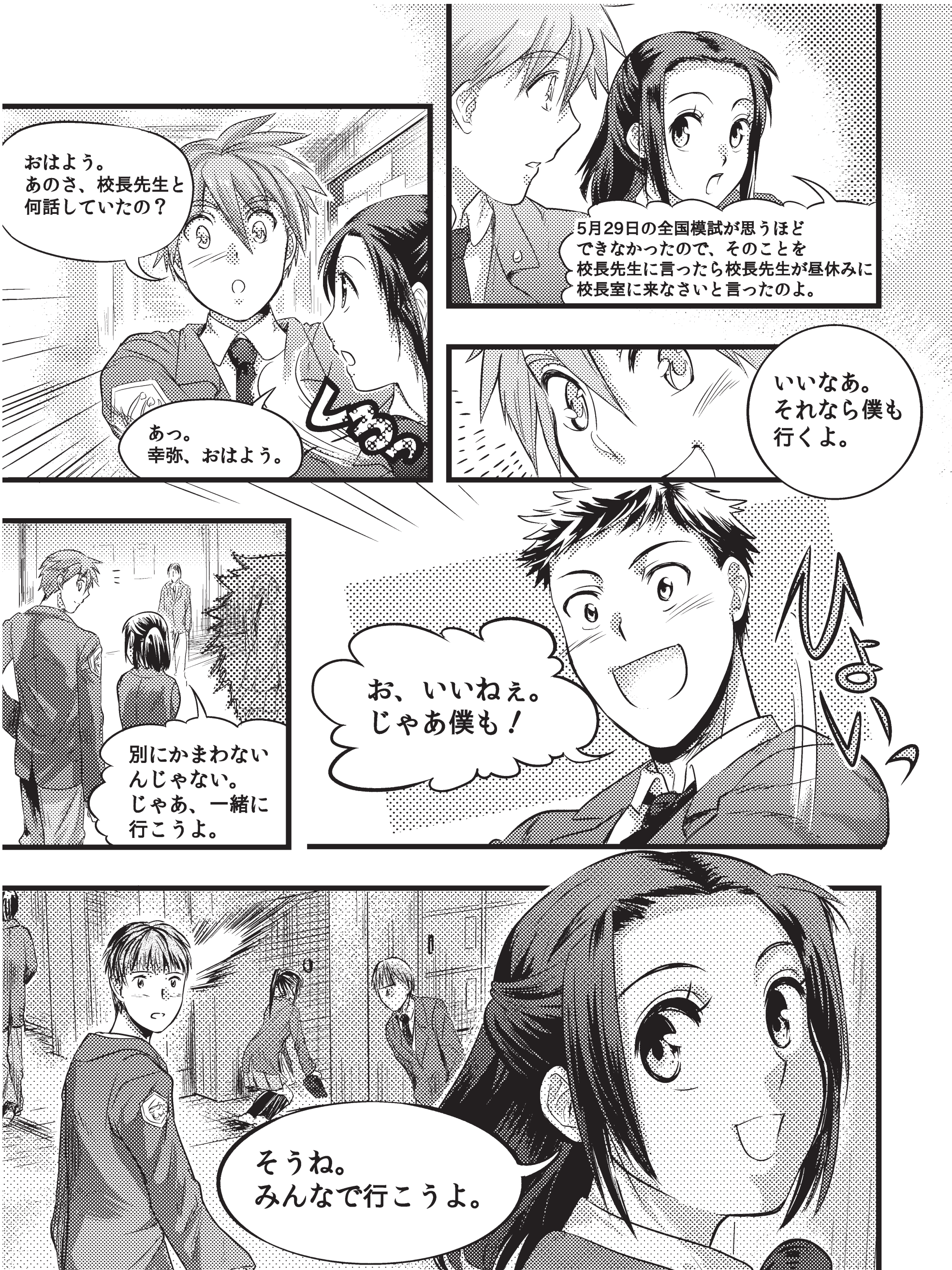
　数学の学習においては, 個々の単元の内容を正しく深く理解することは大切です。しかし, 理解するための力が本当の数学の力なのかもしれません。そのような力にはどのようなものがあるでしょうか。

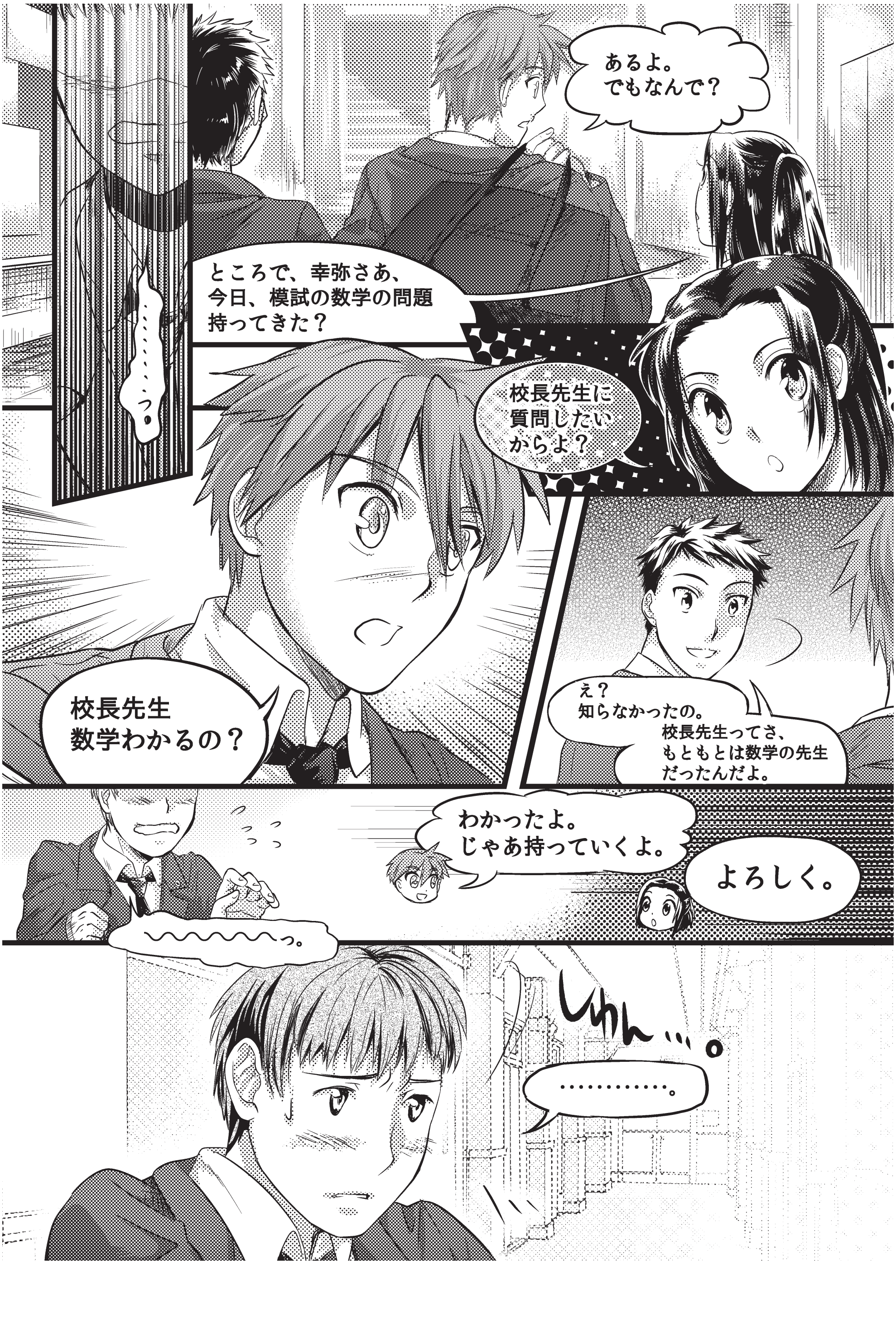
****

　6 月上旬の朝です。幸弥君が幸福高校の玄関に入って靴を履き換えたところで, 校長先生と話をしている幸子さんを見かけました。幸子さんは少し前から校長先生と話をしていたようで, それを見て幸弥君が幸子さんに近寄って行きました。話は終えたようです。

★　　　　　　　　　★


ガヤ
ガヤ
学級たより
あれ……？
校長先生、
ありがとう
ございます。
では、昼休みに
行きますね。
ペコッ
幸子？
はい、どうぞ。
今日の昼は会議が
入っていませんから。


おはよう。
あのさ、校長先生と
何話していたの？
あっ。
幸弥、おはよう。
5月29日の全国模試が思うほど
できなかったので、そのことを
校長先生に言ったら校長先生が昼休みに
校長室に来なさいと言ったのよ。
いいなあ。
それなら僕も
行くよ。
お、いいねぇ。
じゃあ僕も！
別にかまわない
んじゃない。
じゃあ、一緒に
行こうよ。
そうね。
みんなで行こうよ。


ところで、幸弥さあ、
今日、模試の数学の問題
持ってきた？
あるよ。
でもなんで？
……っ。
校長先生に
質問したい
からよ？
校長先生
数学わかるの？
え？
知らなかったの。
校長先生ってさ、
もともとは数学の先生
だったんだよ。
わかったよ。
じゃあ持っていくよ。
よろしく。
〜〜〜〜〜〜っ。
しゅん…。
…………。

昼休みになって昼食を食べ終えたところで, 学級委員の金子君が幸弥君に話しかけて来ました。

★ ★

金子: 福原君, 4 時間目の英語の杉本先生も言っていたけど, 黒板消しがボロボロだから, 職員室に行って新しいものをもらってきて。今日, 君当番だからさ。

幸弥: うん。わかった。これから校長室行くところだし, 職員室は校長室のとなりだからちょうどいいや。

金子: じゃあ, 任せたよ。5 時間目は国語の夏目先生だから黒板消しを取りかえるのを忘れていたらかなり怒るよ。夏目先生は前からこのクラスの黒板消しは汚いって言っていたし。

幸弥: うーん。そうだった。忘れないようにしなければ。

[そう言うと, 幸弥君は幸子さんと月里君に声をかけて校長室に向かいました。
　幸子さんと月里君はまっすぐ校長室に向かい, 幸弥君は職員室によって新しい黒板消しを受け取ってから校長室の前に行きました。3 人がそろったところで校長室の扉をノックしました。すると, 扉の向こうから校長先生の声がしました。]

発飛校長: はい。どうぞ。

[3 人は扉をあけ校長室に入りました。]

発飛校長: ん? 3 人ですか。はい。そこに座ってください。

幸子: よろしくお願いします。

発飛校長: むむ。福原君が持っているのは黒板消しですね。なぜ, 持っているのですか?

幸弥: あ, これですか? うちのクラスの黒板消しボロボロなんで, それを取りかえる係だから $\cdots$

発飛校長: ああ, そういうことですか。

幸子: ねえ, 幸弥。黒板消しはいいけど, 肝心の模試の問題の方は持って来た?

幸弥: あー。忘れた。さっきまで覚えていたのに。

幸子: ん, もうー。なんで忘れたの? あれほど言ったのに。

月里: 福澤さん。幸弥は 2 つのことは同時にこなせないんだよ。

幸弥: ごめーん。そうなんだ。許してくれよ。

[そのとき, 校長先生がにこっとした感じで会話に参加してきました。]

発飛校長: 許せませんね (笑)。

幸弥: えー。何でですか? (あー, びっくりした。)

発飛校長: それは数学を解く上での大切な力でもあるんです。

月里: え? 2 つのことを同時にこなすことがですか?

発飛校長: というよりも, 一つのこと, あるいはいくつかの条件を忘れずに別の何かを正確にこなすことができることがです。

幸子: どういうことですか。

発飛校長: そうですね。今朝の福澤さんの話を聞いていたも今のことと同じことを感じたので説明しましょう。例えば, 次のような問題を考えてみましょう。

[幸子さんは, 先ほどから校長室の外から誰かが覗いている気がしていましたが, さらに校長室の扉が少し開いたような気がしました。しかし, 気にしないことにしました。]

【例題 4 − 1 】
整数 a を整数 b で割った商を q, 余りを r とするとき, a と b の公約数の集合と b と r の公約数の集合が一致することを示せ.

幸子: あっ, これどこかで見たことがある。でも, わかんない。

発飛校長: 問題としては有名な問題ですよ。

幸弥: 僕は見たことすらない $\cdots$

幸子: a を b で割った余りが q で, 余りが r ということは,

$$a = bq + r \tag{4.1}$$

と表せるということよね。

発飛校長: では, まず a と b の公約数を A, b と r の公約数を B としましょう。このとき $A = B$ を示せばよいのですが, $A = B$ を示すには何を言えばよいかわかりますか。

幸弥: ええと, A と B が等しいことを示す。

[校長先生は左手で顔を多い首を左右に振っています。それを見て月里君が言いました。]

幸子: 幸弥, 幸せすぎ!

月里: だから, A と B が等しいことを示すには, どんなことを示したらいいかって校長先生は言っているんじゃないの?

幸子: そうそう。ええと, $A \subset B$ であることと $B \subset A$ であることを示すのだと思います。習いました。

発飛校長: では, 例えば $A \subset B$ を示すには何を示すのですか?

幸子: それは, 任意の $x \in A$ が $x \in B$ でもあることを示すのですよね。

発飛校長: はい。では, まず $A \subset B$ を示してみてください。

幸子: ええと, まず d を a と b の公約数とする。つまり $d \in A$ とする。このとき,

$$a = a'd, \qquad b = b'd \qquad (a',\ b' \text{ は整数})$$

と表せるから, $\cdots$

幸弥: なんで?

幸子: d が a, b の公約数だからでしょ。d は a の約数なんだから $a = a'd$ と書けるわけよね。$b = b'd$ についても同じだし。

発飛校長: はい。そもそも $a = a'd$ のように表せるとき d を a の約数と呼ぶわけです。

幸子: それで $a = a'd$ と $b = b'd$ を (4.1) に代入すると,

$$a'd = b'dq + r$$

となるから, これを整理して,

$$r = (a' - b'q)d$$

これは, $r =$ (整数) $\times\, d$ の形をしているから d は r の約数でもある。それで, $\cdots$

発飛校長: それで, d は b と r の公約数になるのですね。

幸弥: えーと, なんでだろう。

発飛校長: そうそう。数学が苦手な人はまずここで立ち止まってしまうんです。

月里: どういうことですか?

発飛校長: はい。では, d はもともとどういう数でしたか?

月里: たしか, a と b の公約数ですよね。

発飛校長: そうですね。ですから b の約数でもあるのです。

幸弥: はい。

発飛校長: それで, b の約数であることは, この問題を解く間は忘れてはなりません。つまり,

- もともと d は b の約数であった。
- そして, さらに r の約数であることもいえた。

ので, d は b の約数でもあり, r の約数でもあるので d は b と r の公約数ということになるのです。

幸弥: そうか。

発飛校長: 初期の段階で数学が伸び悩んでいるには 2 つの特徴があります。そのうちの一つが, 短期的記憶力の不足によるものです。これは, 例えば, 1 つの問題を解いている間, 「問題の条件が覚えていられない」あるいは, 「問題の条件が頭の中に入りきらない」というものです。このような状況の場合は, 問題解決にあたって, 与えられた条件を使うタイミングになっても使えないで終わるのです。

幸子: もう 1 つって何ですか?

発飛校長: それは抽象化に強いということです。単に「抽象化」と言っても漠然としていますので, 別の機会にわかりやすい例で説明することにしましょう。

幸子: 校長先生, では, その「短期的記憶力」というのは他にはどのような場面の例がありますか?

発飛校長: では, 次のようなものは納得できますか?

「x, y が実数のとき,

$$(x > 0 \text{ または } y > 0) \iff (x + y > 0 \text{ または } xy < 0)$$

が成り立つ。」

[このとき, 幸子さんは, また廊下から視線を感じました。]

幸弥: うーん。よくわからないな。

発飛校長: これはですね, 例えば, 実数係数の 2 次方程式が正の解をもつような係数の条件を求めるときに応用できることですよ。例えば,

「2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 1 = 0$ が正の解をもつような実数 a の範囲を求めよ。」

という問題に使えます。

幸弥: うーん。

幸子: ええと。x と y のどちらかが正だったら, $\cdots$

[それを聞いて校長先生はすぐに指摘しました。]

発飛校長: 福澤さん。数学の「または」は「どちらか」ではないですよ。少なくとも一方の意味です。

幸子: あ, そうか。では, 「x と y の少なくとも一方が正」であることと「$x + y$ が正, または xy が負」であることは同値であるということですね。でもなんでだろう?

発飛校長: この命題が理解できるかどうかで, 数学の理解力があるかどうかがわかることがあります。
まず, 「$\Rightarrow$」についてですが, x と y の少なくとも一方が正という場合には,

「x, y の両方が正」

という場合と,

「x, y の一方が正で他方は 0」
「x, y の一方が正で他方が負」

の場合があります。
　まず, 「x, y の両方が正」の場合は $x + y > 0$ がいえます。

幸弥: 先生, $xy < 0$ は言わなくてもいいんですか?

発飛校長: 「$x + y > 0$ または $xy < 0$」だからいいのですよ。どちらか 1 つでもいえればいいのです。

幸弥: あっ, そうか。

発飛校長: このように, 示すべき目標が頭の中から消えてはいけないのですよ。

幸弥: はーい。

発飛校長: そして, 「x, y の一方が正で他方が 0」の場合も $x + y > 0$ はいえます。また, 「x, y の一方が正で他方が負」の場合は $xy < 0$ がいえます。

結果として, 「$x > 0$ または $y > 0$」の場合は $x + y > 0$, $xy < 0$ の少なくとも一方はいえることになります。ですから「$\Rightarrow$」については成立します。

月里: そうか。じゃあ, 「$\Leftarrow$」の方も同じ感じで考えればいいんだな。

幸子: そうね。ええと, $x + y > 0$ が成り立つときって ……

発飛校長: もしも, $x \leqq 0$, $y \leqq 0$ であったとすれば $x + y \leqq 0$ となってしまうので $x + y > 0$ にはなりませんね。だから, 「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$」ではないのですから, x, y の少なくとも一方は正なのです。

幸子: つまり, $x + y > 0$ が成り立つときは, 「$x > 0$ または $y > 0$」は成り立つ。

幸弥: そうか。ちょっとだけわかった気がする。

月里: じゃあ, $xy < 0$ なら?

幸子: $xy < 0$ のときは, x, y の一方が正で一方が負であるから「$x > 0$ または $y > 0$」は成り立つよね。

月里: ということは, $xy < 0$ のときは「$x > 0$ または $y > 0$」は言えるっていうことか。などほど。

幸子: あ, そうか。これで「$\Leftarrow$」が示されたってことね。

幸弥: ??? うーん。やっぱり, なんで?

幸子: だって, $x + y > 0$ であっても $xy < 0$ であっても「$x > 0$ かつ $y > 0$」が言えたわけだから。

幸弥: $x+y>0$ であっても $xy<0$ であっても $\cdots$??

発飛校長: 福原君は「$x+y>0$ または $xy<0$ であれば」の部分が苦手のようですね。「$x+y>0$ または $xy<0$」の意味はわかっても, それがどのようなことであったかが問題を解いている間は覚えていなくてはならないのです。

[校長先生がそう言ったとき, 昼休み終了のチャイムが鳴りました。]

幸子: あっ, もう昼休み終わっちゃった。先生, またお話を伺いに来てもよいですか?

発飛校長: はい。どうぞ。

★ ★

幸弥君達が廊下に出たとき, 廊下には誰もいませんでした。

★ ★

放課後になりました。幸弥君が帰る支度を終えて教室を出ようとしたとき, 幸子さんが話しかけてきました。

★ ★

幸子: そういえば, 先ほど校長先生が出していた問題解けた?

幸弥: なんだっけ, それ?

幸子: 「2 次方程式 $x^2-ax+a^2-1=0$ が正の解をもつような実数 a の範囲を求めよ。」っていうやつよ。先ほどの話がどう応用されるのかなって。

幸弥: 僕に聞いてもわからないよ。

[そのとき, 伊達君が話しかけてきました。]

伊達: あれ? 君たちもその問題を解いているの?

幸子: 今, 「君たち」って言ったわよね。

伊達: うん。さっき, 別の人からも聞かれたからさ。でも, その人, 「自分が聞いたことは言わないで」と言っていたから名前は言えないよ。

幸子: ふーん。まあ, いいわ。それで, この問題はどう解くの?

伊達: 君たち, 昼休みに校長先生と何か話していたよね。そこの話を使うと, 2 次方程式

$$x^2 - ax + a^2 - 1 = 0 \tag{4.2}$$

が正の解をもつ条件は,

$\boxed{1}$ (4.2) は実数解をもつ
$\boxed{2}$ (4.2) の 2 解を α, β とすると, 「$\alpha + \beta > 0$ または $\alpha\beta < 0$」が成り立つ

これらをともに満たすことである, となる。

幸子: 2 次方程式が正の解をもつとは, 「$\alpha > 0$ または $\beta > 0$」がいえるということだから $\boxed{2}$ が出てくるのね。

伊達: そうだよ。

幸子: ねえ, 伊達君。でもなんで $\boxed{1}$ が必要なの。

伊達: それは $\boxed{1}$ がないと

$$\text{「}\alpha > 0 \text{ または } \beta > 0\text{」} \iff \text{「}\alpha + \beta > 0 \text{ または } \alpha\beta < 0\text{」}$$

がいえないからだよ。

幸子: なんで?

伊達: 例えば, $\alpha = 1 + i$, $\beta = 1 - i$ とすると $\alpha + \beta = 2$ だから $\alpha + \beta > 0$ は成り立つけど, 「$\alpha > 0$ または $\beta > 0$」は成り立たないよね。つまり, 「$\Leftarrow$」がいえなくなるんだ。

幸子: なるほど。それで, $\boxed{1}$ の条件は,

$$\begin{aligned} (\text{判別式}) = a^2 - 4(a^2 - 1) &\geqq 0 \\ 3a^2 &\leqq 4 \\ \therefore \quad -\frac{2}{\sqrt{3}} \leqq a &\leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{4.3}$$

よね。

伊達: そう。そして, 解と係数の関係より, $\alpha + \beta = a$, $\alpha\beta = a^2 - 1$ だから

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta > 0 \text{ または } \alpha\beta < 0) &\iff (a > 0 \text{ または } a^2 - 1 < 0) \\ &\iff a > -1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

となって, (4.3) かつ (4.4) より

$$-1 < a \leqq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

が求める a の範囲ということになるんだよ。

幸弥: ふーん。わかったようなわからないような。でも, これどこかで別の方法で習ったような気もする。

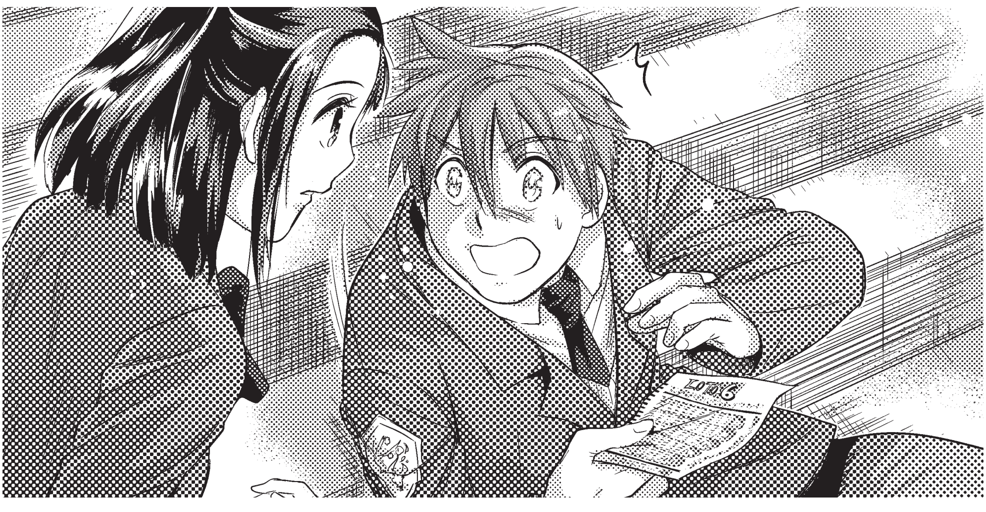
伊達: よくある方法としては $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 1$ とおいて $y = f(x)$ のグラフが $x > 0$ において x 軸と共有点をもつ条件を求めることによって解決する方法があるよ。$y = f(x)$ のグラフの軸の位置によって場合わけをする必要があるけど, そっちの方がよく知られていると思うよ。

幸子: わかったわ。伊達君ありがとう。

★ ★

伊達君はその後すぐに教室を出て行きました。幸弥君は, もう一度, 伊達君の説明を幸子さんにしてもらいました。

幸せ物語 2011 第 4 話　おわり　(絵 ・ 月邸　沙夜)



(第 5 話より)