## B.2　円分多項式

$n$ を自然数として，$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ と定める．すなわち，$\alpha$ は 1 の原始 $n$ 乗根の一つである．次に，集合 $A_n$ を $n$ と互いに素である $n$ 以下の正の整数の集合とする．例えば

$$A_6 = \{1, 5\}$$
$$A_{12} = \{1, 5, 6, 11\}$$
$$A_{13} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

である．容易にわかるように，$p$ が素数のときは $A_p$ は $p-1$ 以下の正の整数の集合である．また，$k \in A_n$ のとき，$\alpha^k$ も 1 の原始 $n$ 乗根である．

さて，自然数 $n$ に対し，次のように定義された多項式 $F_n(x)$ を**円分多項式**という．

$$\boldsymbol{F_n(x) = \prod_{k \in A_n} (x - \alpha^k)}$$

すなわち，$F_n(x)$ とは,「すべての $(x-\alpha^k)$ の積」である．ただし，$k$ は $n$ と互いに素である $n$ 以下の正の整数である．

発展編

例

(1)　$n=2$ のとき，$\alpha=-1$ である．2 以下の正の整数で 2 と互いに素であるものは 1 だけなので

$$F_2(x) = \{x-(-1)\} = x+1$$

である．

(2)　$n=3$ のとき，$\alpha=\omega$ ( ただし，$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$) である．3 以下の正の整数で 3 と互いに素であるものは 1, 2 であるから

$$F_3(x) = (x-\omega)(x-\omega^2) = x^2+x+1$$

である．

(3)　$n=4$ のとき，$\alpha=i$ ($i$ は虚数単位) である．4 以下の正の整数で 4 と互いに素であるものは 1, 3 であるから，$F_4$ は $(x-i)$ と $(x-i^3)$ の積であり