6.2.3 区分求積法

ここでは，数列の和の極限を定積分を利用して求めることを考える．

今までの内容から

1. 連続関数であれば積分可能である．

2. すると，$f(x)$ が連続関数なら $\{x_k\}_{k=1,2,3,\cdots,n}$ が $[a,b]$ の分割になっていたとすると，リーマン和
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$
は $\displaystyle\max_{1\leqq k\leqq n}|\Delta x_k| \to 0$ のとき収束する．

3. その極限値は
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
である．

のようになる．

具体例をあげると

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$ を求めたい．
2. $\displaystyle\left\{\frac{k}{n}\right\}_{k=1,2,3,\cdots\cdots,n}$ は区間 $[0,1]$ の分割になっている．また，小区間の幅はどこも $\dfrac{1}{n}$ であり，$n\to\infty$ とすると小区間の幅は 0 に近づく．
3. したがって
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$$
となる．

この計算は機械的にできるようになった方がよい．