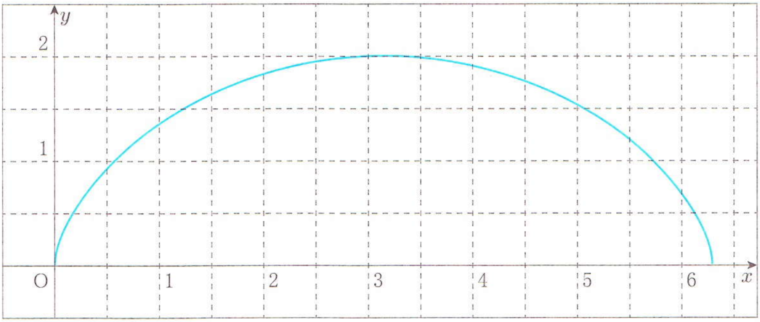

サイクロイドの特徴

[面積] (計算方法は 6.1 節，6.3 節で扱う.)

サイクロイドと x 軸の囲む面積を S とおくと

$$S = \int_0^{2\pi} y\,dx \qquad (\Leftarrow x : 0 \to 2\pi \text{ のとき，} \theta : 0 \to 2\pi \text{ なので.})$$

$$= \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} r^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} d\theta \qquad (\Leftarrow \text{三角関数は 1 周期積分すると 0 になる.})$$

$$= r^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi r^2$$

(すなわち，サイクロイドと x 軸で囲まれた部分の面積は転がした円板の面積の 3 倍.)

[弧長] (p.661 参照.)

サイクロイドの長さを L とおくと

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta \quad \left(\Leftarrow \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \text{ (半角公式) を用いると}\right)$$