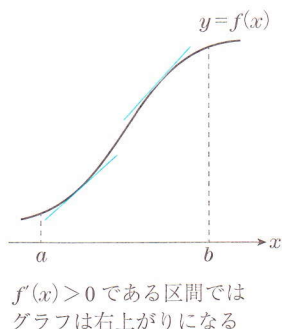


★ 関数の増減とグラフ ★

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は x 座標が x である点の $y = f(x)$ のグラフの接線の傾きを表した。したがって、 $a < x < b$ で常に $f'(x) > 0$ であれば、常にグラフの接線の傾きは正になるので、 $y = f(x)$ のグラフはこの区間で常に右上がりになる。また、この区間で常に $f'(x) < 0$ であれば、接線の傾きが負になるので、グラフは右下がりになる。



【より厳密に理解するために】 (初読の際は飛ばしてもよい)

微分を最初に学習したときには、グラフが右上がりかどうかについては以上のようにグラフの接線の傾きを利用して説明されることが多い。しかし、グラフが右上がり、または右下がりになる理由は、接線の傾きの正負よりもむしろ

【定理】

$\forall x \in I$ に対し $f'(x) > 0 \implies I$ で $f(x)$ は単調に増加

$\forall x \in I$ に対し $f'(x) < 0 \implies I$ で $f(x)$ は単調に減少

であることが本質的である。この定理は次のように平均値の定理²¹を使って証明される。

証明

まず、 x の関数 $f(x)$ が区間 I で増加であるとは

$$\forall x_1, \forall x_2 \in I \text{ に対し, } x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つことであった。このことが「 $\forall x \in I$ に対し $f'(x) > 0$ 」であれば成立することをいえばよい。

$I = [a, b]$ とおく。ここで、 $f(x)$ は I において $f'(x) > 0$ であるのだから、もちろん I で連続で、 (a, b) で微分可能である。したがって、平均値の定理から

²¹5.5 節参照。