9.1.4　確率変数の和と積

★ 確率変数の独立 ★

ある試行に対する「事象の独立」については本シリーズ『数学 I・A』で扱った[3]. 同じように，2 つの確率変数 X, Y が独立という概念があり，次のように定義する．

【確率変数の独立】

X, Y を確率変数とし，それぞれの変数は

$$X = x_1, x_2, \cdots, x_m, \ Y = y_1, y_2, \cdots, y_n$$

の値をとるものとする．

このとき，任意の $k\ (= 1, 2, \cdots, m)$ と $l\ (= 1, 2, \cdots, n)$ に対して

$$P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$$

が成り立つならば，2 つの確率変数は独立であるという．

要するに 2 つの確率変数 X, Y が独立であるとは，どのような $k = 1, 2, \cdots, m$ と $l = 1, 2, \cdots, n$ に対しても $X = x_k$ である事象と $Y = y_l$ である事象が独立であるということである．確率変数 X と Y の各値が互いに影響を与えずに定まるような場合は，X と Y は独立になる．

例 1

2 つのさいころ A, B を 1 回ずつ投げる．確率変数 X は A の出た目とし，確率変数 Y は B の出た目を 3 で割った余りとする．

このとき，$k = 1, 2, \cdots, 6$, $l = 0, 1, 2$ に対し

$$P(X = k) = \frac{1}{6}, \quad P(Y = l) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = k, Y = l) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

であるから，

$$P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(Y = l)$$

が成り立つ．したがって，確率変数 X と Y は独立である．

⇦ $X = k$ である場合はどれも 1 通りずつ．$Y = l$ である場合はどれも 2 通りずつある．2 つのさいころの出た目の組は全部で 36 通りあるが，$X = k, Y = l$ となるのはどれも 2 通りである．

---

[3] 2 つの事象 A と B が独立であるとは $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことであり，$P_A(B) = P(B)$ が成り立つことであった．