証明 2

数学的帰納法を次のように用いて証明することもできる．

$$\left[F_n = {x_1}^n + {x_2}^n + \cdots\cdots + {x_n}^n - nx_1x_2\cdots\cdots x_n \geqq 0 \qquad \cdots\cdots(**)\right]$$

を示せばよい．

(I)　$n = 2$ のときは，

$$F_2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \geqq 0$$

より $(**)$ は成り立つ．

(II)　$n = k$ のとき $(**)$ が成り立つと仮定する．

$$f_{k+1}(x) = {x_1}^{k+1} + {x_2}^{k+1} + \cdots\cdots + {x_k}^{k+1} + x^{k+1} - \{(k+1)x_1x_2\cdots\cdots x_k\}x$$

とおくと（$f_{k+1}(x)$ は x の $k+1$ 次関数），

$$f_{k+1}{}'(x) = (k+1)x^k - (k+1)x_1x_2\cdots\cdots x_k$$

であるから

$$x = \sqrt[k]{x_1x_2\cdots\cdots x_k} \ (= \alpha \text{ とおく})$$

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$
$f_{k+1}{}'(x)$		$-$	0	$+$
$f_{k+1}(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

のとき $f_{k+1}(x)$ は最小になる．最小値は

$$f_{k+1}(\alpha) = {x_1}^{k+1} + {x_2}^{k+1} + \cdots\cdots + {x_k}^{k+1} + \alpha^{k+1} - (k+1)x_1x_2\cdots\cdots x_k\alpha$$

（$\Leftarrow \alpha^{k+1} = x_1x_2\cdots x_k\alpha$ に注意する．）

$$= {x_1}^{k+1} + {x_2}^{k+1} + \cdots\cdots + {x_k}^{k+1} - k(x_1x_2\cdots\cdots x_k)^{\frac{k+1}{k}}$$

となる．ここで，

$$y_1 = {x_1}^{\frac{k+1}{k}}, y_2 = {x_2}^{\frac{k+1}{k}}, \cdots\cdots, y_k = {x_k}^{\frac{k+1}{k}}$$

と置き換えると

$$f_{k+1}(\alpha) = {y_1}^k + {y_2}^k + \cdots\cdots + {y_k}^k - ky_1y_2\cdots\cdots y_k$$

となり，これは $(**)$ の $n = k$ の場合を利用することで $f_{k+1}(\alpha) \geqq 0$ が成立する．
よって，$n = k+1$ のときも $(**)$ は成り立つ．

(I), (II) が示されたから，数学的帰納法により $n \geqq 2$ なる任意の整数 n に対し $(**)$ が成り立つことが示された．■