逆関数が存在する関数のグラフと交点について

発端は, 次のような問題です。

無理関数 $f(x)=\sqrt{3x-2}+2$ の逆関数を $y=g(x)$ とする。

(1) $g(x)$ を求め, $y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。
(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標を求めよ。

この問題の解答については, (1) は省略します。
(2) について,

(主張 A)
「$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称であるから, $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの交点は, $y=g(x)$ と $y=x$ の交点でもある」

つまり,

「$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称なんだから, $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点は, $y=x$ 上にあると決まっているよね。だから, 交点の x 座標を求めるには, $g(x)=x$ を解けばいいよね。」

これが許されるのかということです。結果は, 「誤り」です。これを段階を追って説明します。

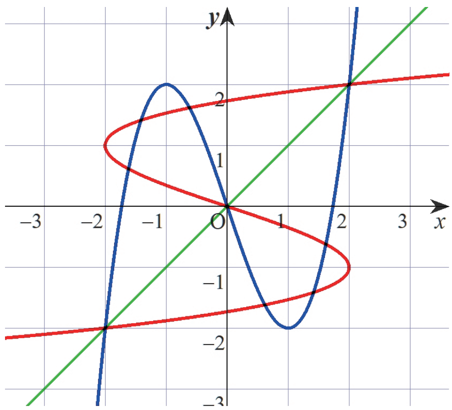
$\boxed{1}$ (主張 A) の部分だけよむと

まず, $f(x)$ と $g(x)$ が逆関数の関係にあるとは限らない場合を考えてみます。ここに, 後のヒントが隠されています。

$y = f(x)$ の表す曲線 C_1 と $x = f(y)$ の表す曲線 C_2 は直線 $y = x$ に関して対称です。そこで, C_1 と C_2 を次のようにしてみます。

$$C_1 : y = x^3 - 3x, \quad C_2 : x = y^3 - 3y$$

この 2 つの曲線は, 次のようになります。



このように, C_1 と C_2 が直線 $y = x$ 以外でも交わります。

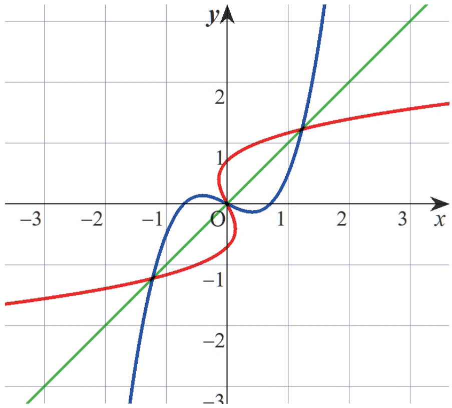
このとき,

「C_1 が 3 次関数のグラフだったから $y = x$ 以外でも交わったの?」

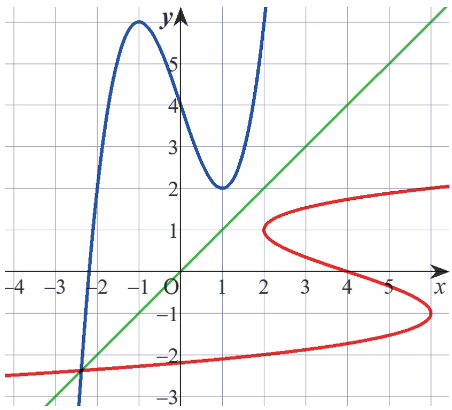
とか,

「$f(x)$ は単調増加でないとだめなの?」

と思うかもしれませんが, そうではありません。参考までに, $C_1 : y = x^3 - \dfrac{1}{2}x$, $C_2 : x = y^3 - \dfrac{1}{2}y$ とすると次のようになります。



また, 最初の C_1, C_2 を平行移動した $C_1 : y = x^3 - 3x + 4$, $C_2 : x = y^3 - 3y + 4$ も $y = x$ 上だけで交わります。



$\boxed{\mathbf{2}}$ $g(x)$ が $f(x)$ の逆関数の場合

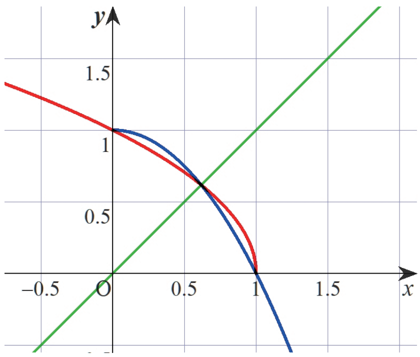
さて，関数 $y = x^3 - 3x$ は逆関数をもちません。問題文では，$f(x)$ には逆関数が存在することになっています。「逆関数のある場合で反例をあげろ」という声も聞こえてくるので，今度はそちらに目を向けます。

まず結論としては，

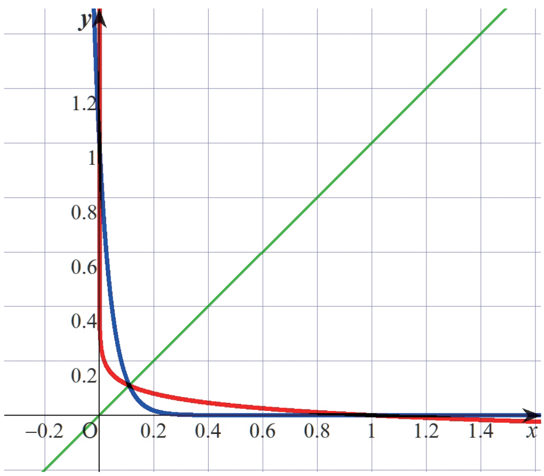
$f(x)$ に逆関数が存在したとしても $y = f(x)$ と $y = f^{-1}(x)$ の交点は，必ず $y = x$ 上にあるとは限らない

ということです。例として，

(1) $f(x) = 1 - x^2 \ (x \geqq 0)$ $\quad (f^{-1}(x) = \sqrt{1-x})$



(2) $f(x) = e^{-20x}$ $\quad \left(f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{20}\log x\right)$



のようなものがあります。これらは，逆関数をもちますが，交点は $y = x$ にあるとは

限りません。したがって, 方程式 $f^{-1}(x)=x$ を解いても交点をすべて見つけられるわけではありません。

$\boxed{3}$　2 曲線 $y=f(x)$, $x=f(y)$ の交点が存在するならば直線 $y=x$ 上に限ることの十分条件

さて, それでは,

「『2 曲線 $y=f(x)$, $x=f(y)$ の交点があれば, それは必ず直線 $y=x$ 上にある』ことの必要十分条件は何なの?」

ということになりますが, 必要十分条件は大変複雑なものなので, 受験数学では,『$\cdots$』部分がいえるための十分条件を利用します。それは, 次のようなものです。

【定理】

$f(x)$ は, 定義域内の「すべての x で $f'(x)>-1$」または「すべての x で $f'(x)<-1$」であるとする。このとき, 2 曲線 $y=f(x)$, $x=f(y)$ の交点が存在すれば, それはすべて直線 $y=x$ 上にある。

注

区間に端点がある場合は, 端点を含め連続, 端点を除き $f'(x)>-1$ または $f'(x)<-1$ がいえるものとする。

注意してほしいのは, この定理は, $f(x)$ が逆関数をもたない場合も含むということです。逆関数に注目しすぎると本質を見誤ります。$\boxed{1}$ の C_1, C_2 であえて単調な関数をあてなかったのもそのためです。

$f(x)$ が逆関数をもって, しかも $f(x)$ が微分可能で単調増加であるならば,【定理】の仮定をクリアしますから, $y=f(x)$ と $y=f^{-1}(x)$ の交点が $y=x$ 上にあるといえます。しかし, $f(x)$ が逆関数をもっても, 単調に減少するものの中には, それがいえないものもあります。

(定理の説明)

$f(x)$ は定義域内のすべての x (端点を除く) で $f'(x)>-1$ であるとする。このとき, 2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$, $C_2: x=f(y)$ が直線 $y=x$ 以外の点 $\mathrm{P}(a,b)$ で交わるとする。このとき, $y=x$ に関する対称性から C_1 と C_2 は, $\mathrm{Q}(b,a)$ でも交わる。この 2 点 P, Q はどちらも直線 $x+y=a+b$ 上にあるが, $f'(x)>-1$ であるから, $F(x)=x+f(x)$ とおくと,

$$F'(x) = 1 + f'(x) > 0$$

を満たすので, $F(x) = a + b$ を満たす x は 2 つ以上は存在しない。したがって, $y = f(x)$ は直線 $x + y = a + b$ 上の 2 点を通ることはないので, 2 曲線 C_1 と C_2 が直線 $y = x$ 以外の点で交わることはない。

つねに $f'(x) < -1$ の場合も同様に示せる。

(終わり)

最初の話に戻ると, 元の問題は, 「$f(x)$ は単調に増加するから」と一言添えておけばよかったということです。もちろん, これが「$f(x)$ は単調に減少するから」では, 意味がありません。