解答

(1)

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\
&= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}\\
&= \mathbf{2-\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

答

(2) $a_n=\tan\theta_n$ とおくと，与えられた漸化式は，

$$
\begin{aligned}
\tan\theta_{n+1} &= \frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{12}}\\
&= \tan\left(\theta_n+\frac{\pi}{12}\right)
\end{aligned}
$$

となるから，

$$
a_n=\tan\left\{\theta_1+\frac{\pi}{12}(n-1)\right\}
$$

と表せる。ここから，$\{a_n\}$ は周期 12 で繰り返すことがいえるので，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{12}$ の中の最大値が求めるものである。

また，$\tan\frac{\pi}{12}<\frac{1}{2}<\tan\frac{\pi}{6}$ であるから，$n=5$ のとき a_n は最大である。最大値は，α を $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ を満たす角として，

$$
\begin{aligned}
a_5 &= \tan\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\cdot 4\right)=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}\\
&= \mathbf{8+5\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

答