$\boxed{\text{解答}}$　$x^2+4x+a^2+5=(x+2)^2+a^2+1>0$ であるから，C_1 の方程式は，

$$y=x^2+4x+a^2+5$$

でよい。C_1 は $y>0$ にのみ存在するので，

C_1 と C_2 が共有点をもつ
$\Longleftrightarrow$ C_1 と $y=\pm\{3x^2-(4a+4)x+a^3+17\}$ が共有点をもつ

である。(C_2 を構成する 2 つの放物線はそれぞれ「全体」と考えてもかまわない。)

(i)　C_1 と $y=3x^2-(4a+4)x+a^3+17$ が共有点をもつ条件は，

$$x^2+4x+a^2+5=3x^2-(4a+4)x+a^3+17$$

すなわち，

$$2x^2-(4a+8)x+a^3-a^2+12=0$$

が実数解をもつことだから，

$$(2a+4)^2-2(a^3-a^2+12)\geqq 0$$
$$a^3-3a^2-8a+4\leqq 0$$
$$(a+2)(a^2-5a+2)\leqq 0$$
$$\therefore\quad a\leqq -2,\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}\leqq a\leqq\frac{5+\sqrt{17}}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

(ii)　C_1 と $y=-\{3x^2-(4a+4)x+a^3+17\}$ が共有点をもつ条件は，

$$x^2+4x+a^2+5=-\{3x^2-(4a+4)x+a^3+17\}$$

すなわち，

$$4x^2-4ax+a^3+a^2+22=0$$

が実数解をもつことだから，

$$4a^2-4(a^3+a^2+22)\geqq 0$$
$$\therefore\quad a^3\leqq -22$$
$$\therefore\quad a\leqq -\sqrt[3]{22} \qquad \cdots\cdots ②$$

である。

① または ② より，

$$\boldsymbol{a\leqq -2,\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}\leqq a\leqq\frac{5+\sqrt{17}}{2}}$$ 答