$\boxed{\text{解答}}$

(1)　OA $=$ OB $=$ OC であるから，O から平面 ABC におろした垂線の足を H とおくと，H は △ABC の外心である。

ここで，

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{6^2+7^2-43}{2\cdot6\cdot7} = \frac{1}{2}$$

であるから，

$$\angle\mathrm{BAC} = \frac{\pi}{3}$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\cdot6\cdot7\sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

また，正弦定理より，

$$2\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{43}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore \quad \mathrm{AH} = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

よって，

$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OH}^2-\mathrm{AH}^2} = \sqrt{5^2-\frac{43}{3}} = \sqrt{\frac{32}{3}}$$

したがって，求める体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{21\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{32}{3}} = \mathbf{14\sqrt{2}}$$ 答

(2)　$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$ であることを考えて，O$(0,0,0)$，A$(5,0,0)$，B$(4,4\sqrt{3},0)$，C(a,b,c) $(c>0)$ とおく。

OC $=5$ より，　$a^2+b^2+c^2=25$

AC $=2\sqrt{5}$ より，　$(a-5)^2+b^2+c^2=20$

BC $=\sqrt{41}$ より，　$(a-4)^2+(b-4\sqrt{3})^2+c^2=41$

これらを解いて，

$$a=5,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt{13}$$

を得る。よって，求める体積は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\sqrt{3}\times\sqrt{13} = \mathbf{\frac{10}{3}\sqrt{39}}$$ 答