$\boxed{\text{解答}}$

(1)　C_1 は原点 O を中心とする半径 1 の円。

C_2 は,

$$(x-2)^2+(y+a)^2=4$$

で表されるから, 中心 $\mathrm{A}(2, -a)$, 半径 2 の円である。この 2 円が 2 点で交わる条件は,

$$\begin{aligned}2-1 &< \mathrm{OA} < 2+1\\ 1 &< \sqrt{a^2+4} < 3\end{aligned}$$

この不等式を解いて,

$$-\sqrt{5} < a < \sqrt{5} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

① の下で, C_1, C_2 の方程式を辺々引いて,

$$4x-2ay-a^2=1 \qquad \cdots\cdots ②$$

これは, C_1, C_2 の 2 交点を通る直線を表する。② の直線が点 $(-1, -3)$ を通る条件は,

$$\begin{aligned}&-4+6a-a^2=1\\ &a^2-6a+5=0\\ &\therefore \quad a=1,\ 5\end{aligned}$$

この中で, ① を満たすものを選んで,

$$\boldsymbol{a=1}$$ 答

(2)　曲線 C と 2 点で接し, 点 A を通る直線の方程式を $y=m(x+1)-12$ とおく。このとき 4 次方程式

$$x^4-2(a-3)x^3+(a^2-4a+9)x^2-(a^2-4a)x=m(x+1)-12$$

すなわち,

$$x^4-2(a-3)x^3+(a^2-4a+9)x^2-(a^2-4a+m)x-m+12=0$$

は異なる重解 α, β をもつから, 解と係数の関係より,

$$2(\alpha+\beta)=2(a-3) \qquad \cdots\cdots ①$$
$$\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=a^2-4a+9 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$2\alpha\beta(\alpha+\beta)=a^2-4a+m \qquad \cdots\cdots ③$$
$$\alpha^2\beta^2=-m+12 \qquad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ。

① より,　$\alpha+\beta=a-3$

② より,　$(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta=a^2-4a+9$

$$(a-3)^2+2\alpha\beta=a^2-4a+9$$

$$\therefore \quad \alpha\beta=a$$

である。α, β は異なる実数であるから, 2 次方程式 $t^2-(a-3)t+a=0$ は異なる 2 つの実数解をもつので,

$$(\text{判別式})=(a-3)^2-4a>0$$

$$a^2 - 10a + 9 > 0$$

$$\therefore \quad a < 1,\ 9 < a \qquad \cdots\cdots ⑤$$

を満たす。

また, ③ より,

$$2a(a-3) = a^2 - 4a + m \qquad \therefore \quad m = a^2 - 2a$$

④ より, $a^2 = -m + 12 \qquad \therefore \quad m = -a^2 + 12$

よって,

$$a^2 - 2a = -a^2 + 12$$

$$2a^2 - 2a - 12 = 0$$

$$\therefore \quad (a-3)(a+2) = 0$$

⑤ も考えて,

$$\boldsymbol{a = -2}$$ 答

である。

このとき, $m = 8$ である。