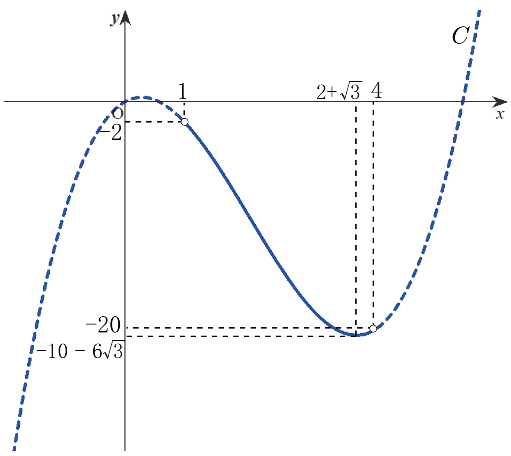
解答

(1)　与えられた方程式は $x^3-6x^2+3x=a$ と表せるから，$f(x)=x^3-6x^2+3x$ とおくと，曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $y=a$ が $1<x<4$ の範囲に共有点をもつ a の条件が求めるものである。

$$f'(x)=3x^2-12x+3$$
$$=3\{x-(2+\sqrt{3})\}\{x-(2-\sqrt{3})\}$$

となるから，$1<x<4$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	(1)	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$	(4)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(-2)	$\searrow$	$-10-6\sqrt{3}$	$\nearrow$	(-20)



したがって，$y=f(x)$ と $y=a$ が $1<x<4$ で共有点をもつ条件は，

$$\boldsymbol{-10-6\sqrt{3} \leqq a < -2}$$ 答

(2)　与えられた方程式は，

$$(x-a)\{x^2-(a+4)x+3\}=0$$

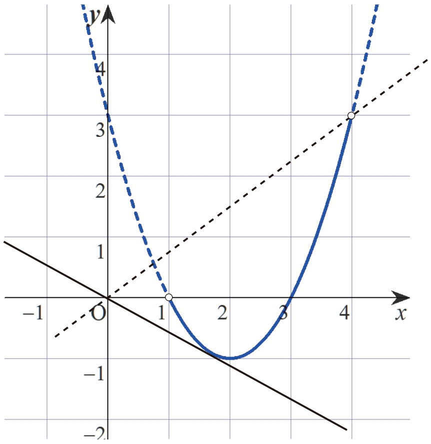
と表せるから，解は $x=a$ と 2 次方程式 $x^2-(a+4)x+3=0$ の 2 解である。

解 a が $1<x<4$ を満たす条件は，$1<a<4$ である。

次に，2 次方程式 $x^2-(a+4)x+3=0$ は，

$$x^2-4x+3=ax$$

となるから，曲線 $y=x^2-4x+3$ と直線 $y=ax$ が $1<x<4$ で共有点をもつような a の範囲を求める。次の図のようになる。



なお, $y=x^2-4x+3$ と $y=ax$ が接する a は, 2 次方程式 $x^2-(a+4)x+3=0$ が重解をもつ a であり,

$$(\text{判別式}) = (a+4)^2 - 4 \cdot 3 = 0$$
$$a^2+8a+4=0$$
$$\therefore \quad a = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

このうち, $a=-4+2\sqrt{3}$ の方が $1<x<4$ で接する場合である。

以上より, $y=x^2-4x+3$, $y=ax$ が $1<x<4$ で共有点をもつ条件は,

$$-4+2\sqrt{3} \leqq a < \frac{3}{4}$$

である。

求める a の条件は,

$$\boldsymbol{-4+2\sqrt{3} \leqq a < \frac{3}{4}} \text{ または } \boldsymbol{1 < a < 4}$$ 答