解答

(c) より, $n \geqq 2$ のとき,

$$b_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

また, $b_1 = (1+1)^2 = 4$ である。

$n \geqq 2$ のとき, (b) より,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_k)^2 \qquad (b_1)^2 = 3^2 + 7 \text{ と考えて,} \\ &= 1 + 7 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)^2 \\ &= 8 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k^2 + 4k + 1) \\ &= 8 + 4 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + (n-1) \\ &= \frac{4}{3}n^3 - \frac{1}{3}n + 7 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\boldsymbol{a_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \dfrac{4}{3}n^3 - \dfrac{1}{3}n + 7 & (n \geqq 2) \end{cases}} \quad \text{答}$$

注

この問題は, $n = 1$ の場合と $n \geqq 2$ の場合をまとめて表すことができない。