解答

(1)　$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1}$$

であるが, $a_1 = 3$ であるから, 右辺は初項 3, 公比 3 の等比数列の和であると考えて,

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3}{2}(3^n - 1) \end{aligned}$$

となり, これは $n = 1$ のときも成り立つ。

　以上より,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{3}{2}(3^n - 1)}$$ 答

(2)　$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} - \frac{72}{(n^2+3n)(n^2+3n+2)} \\ &= a_{n-1} - \frac{72}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots) \end{aligned}$$

は, n の番号を 1 大きくして,

$$a_{n+1} = a_n - \frac{72}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

となるから, $n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{72}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \\ &= 1 - 24\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)(k+4)}\right\} \\ &= 1 - 24\left\{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right\} \\ &= \frac{24}{(n+1)(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

これは, $n = 1$ でも成り立つ。

　以上より,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{24}{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$ 答

注

　解答では, 漸化式の番号をずらして a_{n+1} と a_n の関係に直したが, そのままの形でも求めることはできる。その場合, $n \geqq 2$ に対して,

$$a_n = a_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{72}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

のようになる。