# 受験数学コンクール 2024　問題と解答

以下, 解答するにあたっての注意事項です。

(1)　各問題の中にある $\boxed{\text{A}}$ などに入る文字はアルファベットと数字, $-$ などの記号です。大文字, 小文字などを間違えずに半角で入力してください。

(2)　答の枠を埋めればよいので, 高校数学の範囲外の知識を用いてもかまいません。また, 高校数学の知識が必ずしも必要になるわけでもありません。

(3)　**「整数部分」の定義**
このコンクールに限っては, 実数 $x$ の「整数部分」は次のように定義することとします。

- $x \geqq 0$ のとき
$x$ の整数部分とは, **$x$ 以下の最大の整数**, すなわち $[x]$ とします。([ ] はガウス記号)
(例) 3.45 の整数部分は 3 であり, 6 の整数部分は 6 とする。
- $x \leqq -1$ のとき
$x$ の整数部分とは, $\boldsymbol{-[-x]}$ とします。
(例) $-3.21$ の整数部分とは, $-3$ であり, $-5$ の整数部分は, $-5$ である。
- $-1 < x < 0$ の整数部分は $-0$ と定義します。(0 ではありません。) なお, 0 の整数部分は 0 と定義します。
(例) $-0.4$ の整数部分は $-0$ とする。

# 第 1 次予選　問題

**Stage 1**

以下の問いに答えよ。

(1)　どのような実数 $a$ に対しても

$$x^4-(2a-k)x^3+(a^2-ka+2)x^2-(2a-k)x+1=0$$

を満たす実数 $x$ が存在するような正の数 $k$ の最小値は, $\boxed{\text{A}}$ である。

(2)　すべての実数 $x$ に対して,

$$x^4-\frac{4}{3}(a+4)x^3+2(4a+3)x^2-12ax-5a+4\geqq 0$$

が成り立つような実数 $a$ に対し, $10a$ の範囲は,

$$\boxed{\text{B}}\leqq 10a\leqq\boxed{\text{C}}$$

である。

(解答注意)

B または C が整数でない場合は, 整数部分を記してください。

(例 1) $2.34\leqq a\leqq 5.68$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には 23, $\boxed{\text{C}}$ には 56 が入る。

$-3.456\leqq a\leqq 4$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には, $-34$, $\boxed{\text{C}}$ には 40 が入る。

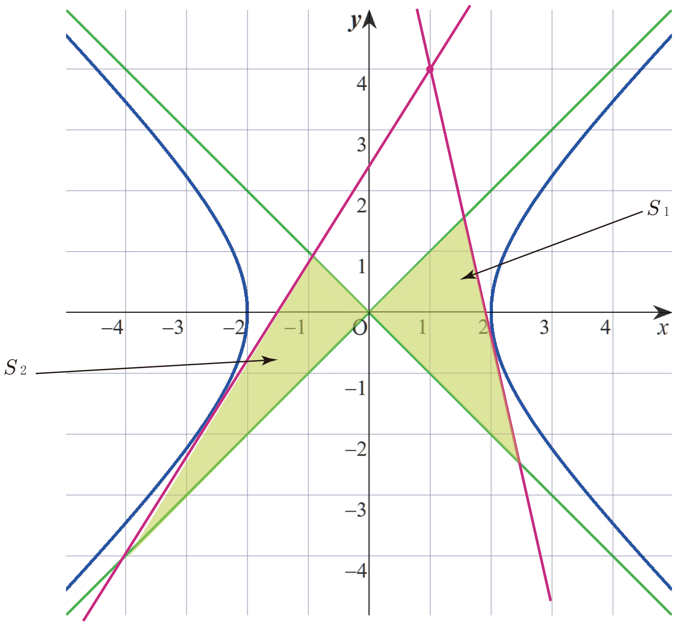
また, 条件を満たす $a$ が一つの実数のみの場合は, B と C には同じ値を入れてください。

(例 2) $a=3$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には 30, $\boxed{\text{C}}$ にも 30 が入る。

**Stage 2**

以下の問いに答えよ。

(1)　双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ を $H$ とする。点 $(1, 4)$ から $H$ に 2 本の接線 $l_1$, $l_2$ を引くことができるが, $l_i$ $(i = 1,\ 2)$ と $H$ の 2 本の漸近線で囲まれる三角形の面積を $S_i$ とするとき, $S_1 + S_2 = \boxed{\text{A}}$ を求めよ。




(2)　3 辺の長さが 3, 4, $\sqrt{13}$ である三角形 $T_1$, 3 辺の長さが 2, 3, $\sqrt{7}$ である三角形 $T_2$, 3 辺の長さが $2\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$ である三角形 $T_3$ がある。この 3 つの三角形の面積の和を $S$ とおくとき, $S^2 = \boxed{\text{B}}$ を求めよ。

**Stage 3**

以下の問いに答えよ。

(1)　$xy$ 平面上に原点 O$(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円 $C$ と中心 $(n, 0)$, 半径 $n$ の円 $D_n$ がある。ただし, $n$ は正の整数である。

　$C$ と $D_n$ の共通接線のうち傾きが正であるものを $l_n$ とし, $l_n$ と $D_n$ の接点を $\mathrm{P}_n$ とする。このとき,

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} < \frac{1}{100}$$

を満たす最小の $n$ を求めると $\boxed{\text{A}}$ である。

(注) $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は 2 点 $\mathrm{P}_n$ と $\mathrm{P}_{n+1}$ の距離である。

(2)　$x$, $y$, $z$, $w$ は正の整数で, 次の式を満たす。

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=1$

(b) $1<x<y<z<w$

このような $x$, $y$, $z$, $w$ の組の中で $x+y+z+w$ の最小値は $\boxed{\text{B}}$ であり, $x+y+z+w$ の最大値は $\boxed{\text{C}}$ である。

**Stage 4**

以下の問いに答えよ。

(1)　底面の半径が 3, 高さが 6 の円すい $K_1$ と底面の半径 5, 高さが 6 の円すい $K_2$ がある。$K_1$, $K_2$ の体積を順に $V_1$, $V_2$ とするとき, $\dfrac{1}{\pi}(V_1+V_2)=\boxed{\text{A}}$ を求めよ。

(2)　上底面の半径が 3, 下底面の半径が 5, 高さが 6 の円すい台の体積を $V_3$ とするとき, $\dfrac{1}{\pi}V_3=\boxed{\text{B}}$ を求めよ。

(3)　$xyz$ 空間に 2 点 $\mathrm{P}(5,0,0)$, $\mathrm{Q}(0,3,6)$ がある。線分 PQ を $z$ 軸のまわりに一回転したときに通過する面と 2 平面 $z=0$, $z=6$ によって囲まれる部分の体積を $V_4$ とするとき, $\dfrac{1}{\pi}V_4=\boxed{\text{C}}$ を求めよ。

# 第 1 次予選　解答

**Stage 1**

(1)　与えられた方程式

$$x^4-(2a-k)x^3+(a^2-ka+2)x^2-(2a-k)x+1=0$$

は,

$$(x^2-ax+1)\{x^2-(a-k)x+1\}=0$$

となるから, この方程式が実数解をもつ条件は,

$$x^2-ax+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$
$$x^2-(a-k)x+1=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

の少なくとも一方が実数解もつことである。①, ② の判別式を $D_1$, $D_2$ とおくと,

$$D_1=a^2-4$$
$$D_2=(a-k)^2-4$$

であるから, 与えられた方程式が実数解をもつ条件は,

$$(a \leqq -2 \vee a \geqq 2) \vee (a \leqq k-2 \vee a \geqq k+2)$$

これがすべての実数 $a$ で成り立つ条件は, $k>0$ も考えて,

$$2 \leqq k-2$$

$$\therefore \quad k \geqq 4$$

である。よって, 求める最小値は,

**4**

である。

(2)
$$x^4-\frac{4}{3}(a+4)x^3+2(4a+3)x^2-12ax-5a+4 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}(a+4)x^3+2(4a+3)x^2-12ax-5a+4$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x)&=4x^3-4(a+4)x^2+4(4a+3)x-12a \\ &=4\{x^3-(a+4)x^2+(4a+3)x-3a\} \\ &=4(x-1)(x-3)(x-a) \end{aligned}$$

であり, 4 次関数の最小値は極値でとることも考えて, すべての実数 $x$ に対し, ① すなわち, $f(x) \geqq 0$ となる条件は,

$$f(1) \geqq 0 \ \wedge \ f(3) \geqq 0 \ \wedge \ f(a) \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である。ここで,

$$f(1) \geqq 0 \iff -\frac{31}{3}a+\frac{17}{3} \geqq 0 \iff a \leqq \frac{17}{31} \qquad \cdots\cdots ③$$
$$f(3) \geqq 0 \iff -5a-5 \geqq 0 \iff a \leqq -1 \qquad \cdots\cdots ④$$
$$\begin{aligned} f(a) \geqq 0 &\iff -\frac{1}{3}a^4+\frac{8}{3}a^3-6a^2-5a+4 \geqq 0 \\ &\iff a^4-8a^3+18a^2+15a-12 \leqq 0 \end{aligned}$$

$$\iff (a+1)(a^3-9a^2+27a-12) \leqq 0$$
$$\iff (a+1)\{(a-3)^3+15\} \leqq 0$$

したがって,

$$-1 \leqq a \leqq 3-\sqrt[3]{15} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である。

よって, すべての実数 $x$ に対し ① が成り立つ $a$ の範囲は,

$$② \iff (③ \land ④ \land ⑤) \iff a=-1$$

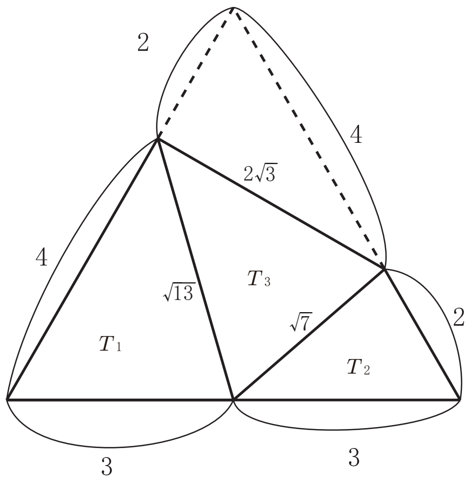
であるから, B, C には **−10** が入る。

**Stage 2**

(1) これは, 双曲線上のどの点から接線を引いても $S_1$, $S_2$ は一定値 4 をとることを使う。

$$S_1+S_2=4+4=\mathbf{8}$$

(2) 3 つの三角形をあわせると次のようになる。




1 辺の長さ 6 の正三角形から, 3 辺の長さが 2, 4, $2\sqrt{3}$ の直角三角形の面積を引いて,

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 6^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}$$
$$=7\sqrt{3}$$

である。したがって,

$$S^2=\mathbf{147}$$

である。

**Stage 3**

(1)　$\mathrm{P}_n(1, \sqrt{2n-1})$ となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} &= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\end{aligned}$$

であるから,

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} < \frac{1}{100} \iff \sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1} > 200 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

$n = 500$ のとき $\sqrt{10001}+\sqrt{9999} < 200$　($y = \sqrt{x}$ の凸性などから)
$n = 501$ のとき $\sqrt{10003}+\sqrt{10001} > 200$

であるから, 求める最小の $n$ は **5001** である。

(2)　$x = 3$ の場合,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w} \leqq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$$

であるから, (a) を満たさない。したがって, $x = 2$ の場合のみを考えればよい。

$x = 2$ のとき $y = 3$ または $y = 4$ であり, (b) を満たすものは,

$$(x, y, z, w) = (2, 3, 7, 42),\ (2, 3, 8, 24),\ (2, 3, 9, 18),\ (2, 3, 10, 15),\ (2, 4, 5, 20),\ (2, 4, 6, 12)$$

である。よって, $(x, y, z, w) = (2, 4, 6, 12)$ のとき $x+y+z+w = 24$ は最小で, $(x, y, z, w) = (2, 3, 7, 42)$ のとき $x+y+z+w = 54$ は最大。

よって, $\boxed{\text{B}}$ には, **24** が入り, $\boxed{\text{C}}$ には, **54** が入る。

**Stage 4**

(1)　$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 18\pi$

$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 50\pi$

したがって,

$$\frac{1}{\pi}(V_1 + V_2) = \mathbf{68}$$

(2)　まじめに計算してもよいが, 円すい台の公式を用いると,

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot 6(3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2)\pi = 98\pi$$

よって,

$$\frac{1}{\pi}V_3 = \mathbf{98}$$

(3)　まじめに求めると, $V_4 = 68\pi$ となるので,

$$\frac{1}{\pi}V_4 = \mathbf{68}$$

である。

(注) ここで, $V_1 + V_2 = V_4$ に気がつくと本選のときに役に立つ。

# 第 2 次予選　問題

**Stage 1**

次の空欄を埋めよ。

(1)　曲線 $x^2+\sqrt{3}xy+12=0$ は双曲線であるが，その焦点のうち，$y>0$ にあるものの座標を $(b,c)$ とおくと，$b<0$ であり，$b^2=\boxed{\text{A}}$，$c^2=\boxed{\text{B}}$ である。

(2)　次の式で与えられる数列 $\{x_n\}$ がある。

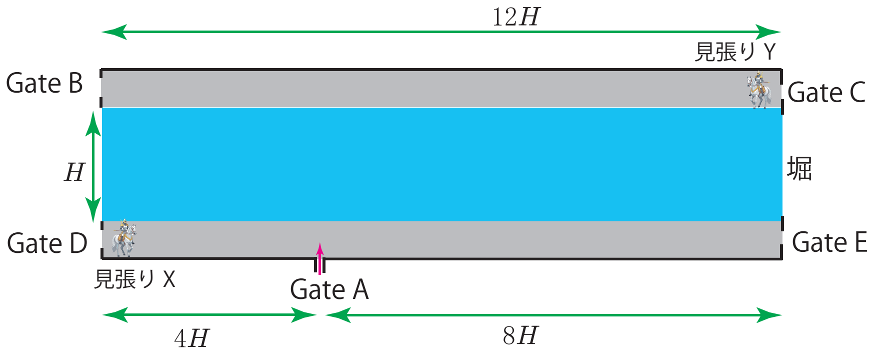
$$x_1=-1+\cos\frac{\pi}{1024}$$
$$x_{n+1}=2x_n^2+4x_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

この数列の $x_9=\alpha$ とするとき，$-100\alpha$ の整数部分は $\boxed{\text{C}}$ であり，$S=\displaystyle\sum_{n=9}^{\infty}x_n$ とおくとき，$-100S$ の整数部分は $\boxed{\text{D}}$ である。

**Stage 2**

次の空欄を埋めよ。

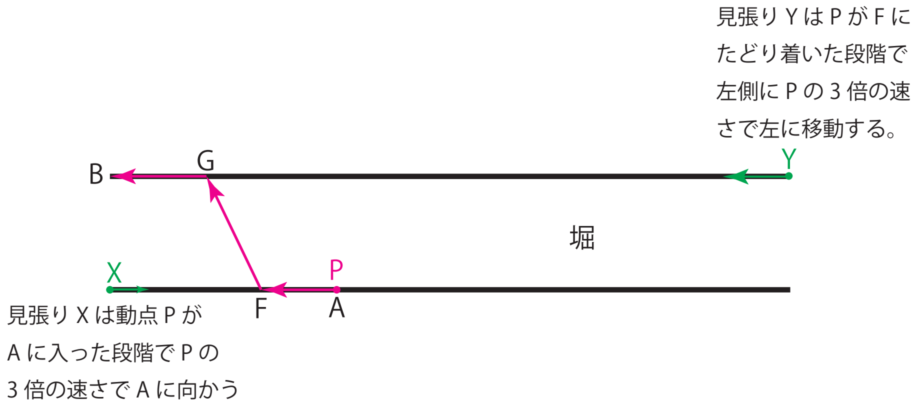
(1)　君たちは，これからある城の中に潜入しようとしており，今，Gate A の前までたどり着いたところである。ここから先に進むためには Gate B ～ Gate E のいずれかから城の中に入らなければならない。Gate D, E から入る場合は通路のみを走ればよいが，Gate B, C から中に入る場合は，途中で堀を泳がなければならない。泳ぐ速さは，通路を走る場合の $k$ $(0<k<1)$ 倍になる。




ところが，通路には図のように見張り X と見張り Y がいる。見張り X と見張り Y は君たちの 3 倍の速さで捕まえに来る。そして，見張り X は君たちが A から中に入ったのと同時に君たちを見つけ君たちの方に向かう。見張り Y は君たちが堀に飛び込んだ瞬間に音を聞きつけて通路を左に向かう。なお，見張り X と見張り Y は堀の中を泳ぐことはできない。

このような状況で，君たちは Gate B ～ Gate E のいずれかから城の中に入らなければならないが，Gate C ～ Gate E に向かうと捕まるので，Gate B に向かうとする。

さて，この問題を簡単にしよう。次の図のような場合で考えることにする。




君たちを動点 P とし, まず, P から F 地点まで見張り X に捕まらないように進み, F 地点で堀に飛び込む。ただし, F 地点に君たちと見張り X が同時に着き, 君たちが堀に飛び込んだ場合は, 君たちは捕まらないとする。

次に, 君たちが堀に飛び込んだ瞬間に見張り Y は Gate B に向けて全力で動き出す。P は飛び込んだ後はまっすぐ G 地点に向かい, 上陸し Gate B に向けて全力で逃げる。先に B にたどり着けば見張り Y は君たちを捕まえない。

さて, 無事逃げ切るための $k$ の最小値あるいは下限を $m$ とおくとき, $1000m$ の整数部分は $\boxed{\text{A}}$ である。例えば, $m = 0.23456$ であれば, $1000m = 234.56$ となるから 234 を答えることになる。

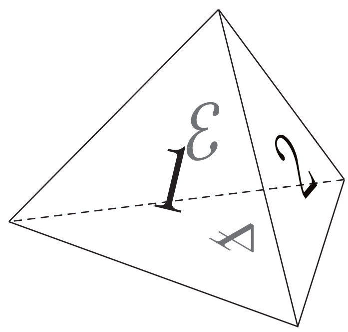
(注)

以下のような問題に対する質問がありました。それに対する回答は以下のようになっています。

質問： P が堀を泳ぐときの見張り役 Y のスピードは P と同様に $k$ 倍されるのか否か解釈が分かりません。

回答：見張り Y はつねに P が地上を動いているときの 3 倍で動きます。Y の速さは一定です。

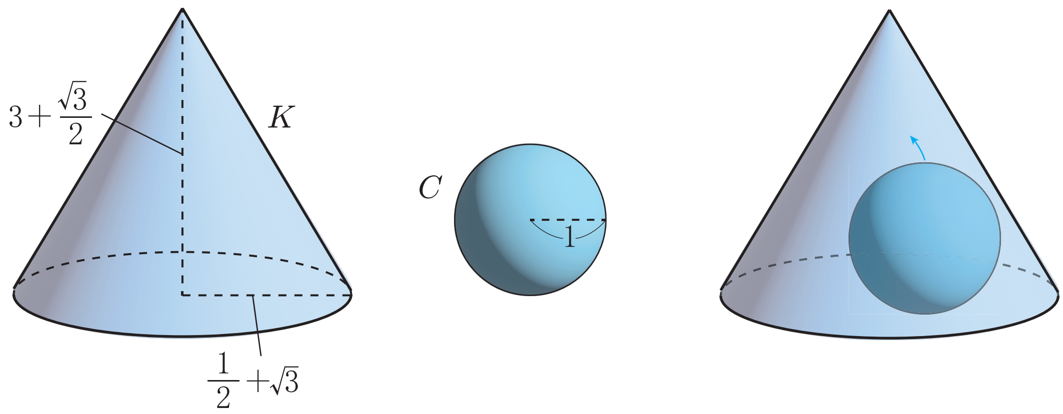
(2) 正四面体のさいころがある。4 つの面には 1 から 4 までの数字が書かれている。このさいころを 5 回振り, $n$ $(1 \leqq n \leqq 5)$ 回目に底面にある目を $a_n$ とするとき, $a_n > a_{n-1}$ $(2 \leqq n \leqq 5)$ を満たす $n$ がちょうど 2 個であるような組 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ の個数は $\boxed{\text{B}}$ である。



**Stage 3**

以下の空欄を埋めよ。

(1)　底面の半径が $\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}$, 高さが $3+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の直円すい $K$ があり, $K$ の内部を半径 1 の球体 $C$ が自由に動く。このとき, どのように $C$ をとっても $C$ に含まれる部分の体積を $V$ とする。この $V$ について, $\dfrac{1000V}{\pi}$ の整数部分は $\boxed{\text{A}}$ である。ただし, 必要ならば $\pi = 3.141592\cdots$ を用いてもよい。




(2)　数列 $\{a_n\}$ は次のように定義される。

$$a_1 = 43$$
$$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき, $a_n$ の正の約数の個数が奇数になる最小の正の整数 $n$ は $\boxed{\text{B}}$ である。

# 第 2 次予選　解答

**Stage 1**

(1)　曲線 $x^2+\sqrt{3}xy+12=0$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転すると, $x^2-3y^2=24$ となるから, この曲線は双曲線であり, 焦点の座標は $(\pm 4\sqrt{2}, 0)$ である。この点を O のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転して, 焦点は, $\left(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$ である。したがって,

$$b^2=8,\ c^2=24$$

であるから, $\boxed{\text{A}}$ には **8**, $\boxed{\text{B}}$ には **24** が入る。

(2)　$x_{n+1}=2x_n^2+4x_n$ より,

$$x_{n+1}+1=2(x_n+1)^2-1 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。ここで, $x_n+1=\cos\theta_n$ とおくと, ① は,

$$\begin{aligned}\cos\theta_{n+1}&=2\cos\theta_n-1\\&=\cos 2\theta_n\end{aligned}$$

となるから,

$$x_n+1=\cos 2^{n-1}\theta_1$$

$$\therefore\quad x_n=\cos 2^{n-11}\pi-1$$

したがって,

$$x_9=\cos\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{\sqrt{2}}-1$$

であるから,

$$-100x_9=100-50\sqrt{2}=100-70.71\cdots=29.28$$

よって, $\boxed{\text{C}}$ には **29** が入る。
さらに,

$$x_{10}=\cos\frac{\pi}{2}-1=-1$$

$$x_{11}=\cos\pi-1=-2$$

$n \geqq 12$ のとき,

$$x_{12}=\cos 2^{n-11}\pi-1=0$$

であるから,

$$S=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)-1-2=\frac{1}{\sqrt{2}}-4$$

したがって,

$$\begin{aligned}-100S&=400-50\sqrt{2}=400-70.71\\&=329.28\cdots\end{aligned}$$

となるから, $\boxed{\text{D}}$ には, **329** が入る。

**Stage 2**

(1)　P の地上での速さを $v$ とおく。P は $\mathrm{AF}=H$ の長さの地点で堀に飛び込む。その後, P は F 地点から水平方向に左に $x$ だけ進んだ Gate B のある廊下に上陸するとすると, F 地点から Gate B 地点までの所要時間 $T$ は,

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mathrm{FG}}{kv}+\frac{\mathrm{BG}}{v} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+H^2}}{kv}+\frac{3H-x}{v} \\ &= \frac{1}{kv}\{\sqrt{x^2+H^2}+k(3H-x)\} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dx} &= \frac{1}{kv}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+H^2}}-k\right) \\ &= \frac{1}{kv}\cdot\frac{x-k\sqrt{x^2+H^2}}{\sqrt{x^2+H^2}} \\ &= \frac{1}{kv}\cdot\frac{(1-k^2)x^2-k^2H^2}{\sqrt{x^2+H^2}(x+k\sqrt{x^2+H^2})} \end{aligned}$$

より, $T$ は $x=\dfrac{kH}{\sqrt{1-k^2}}$ のとき最小になり, 最小値は,

$$\frac{H}{kv}(\sqrt{1-k^2}+3k)$$

である。一方, 見張り Y が Gate B に到着する時間は, P が堀に飛び込んでから, $\dfrac{12H}{3v}=\dfrac{4H}{v}$ であるので, P が捕まらない条件は,

$$\frac{H}{kv}(\sqrt{1-k^2}+3k) \leqq \frac{4H}{v}$$

$$\therefore\quad k^2 \geqq \frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad k \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}=0.707\cdots$$

である。したがって, $1000m$ の整数部分は,

**707**

(2)　$\{b_n$ を次のように定義する。

$$b_1=a_1$$
$$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+(a_n-a_{n-1}) & (a_n>a_{n-1}\text{ のとき}) \\ b_{n-1}+(a_n-a_{n-1})+4 & (a_n \leqq a_{n-1}) \end{cases}$$

すなわち, $b_n \equiv a_n \pmod 4$ であり, $b_{n-1}<b_n \leqq b_{n-1}+4$ となるように $b_n$ をとる。
例えば, $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=2,\ a_4=2,\ a_5=3$ の場合,

$$b_1=2,\ b_2=4,\ b_3=6,\ b_4=10,\ b_5=11$$

である。このとき, $a_n>a_{n-1}$ となる $n$ が 2 個である条件は, $9 \leqq b_n \leqq 12$ である。
ところで,

$$c_1=b_1$$

$$c_n = b_n - b_{n-1} \qquad (2 \leqq n \leqq 5)$$

とおくと, $1 \leqq c_n \leqq 4$ であり,

$$9 \leqq c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \leqq 12$$

を満たす。$S = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$ とおくと, $5 \leqq S \leqq 20$ であり,

$5 \leqq S \leqq 8$ を満たす $(c_1, c_2, \cdots, c_5)$ の組と $17 \leqq S \leqq 20$ を満たす組の個数は一致して, 56 通り。
$9 \leqq S \leqq 12$, $13 \leqq S \leqq 16$ を満たす $(c_1, c_2, \cdots, c_5)$ の組は一致するから, 求める個数は,

$$\frac{1}{2}(4^5 - 56 \times 2) = \mathbf{456}$$

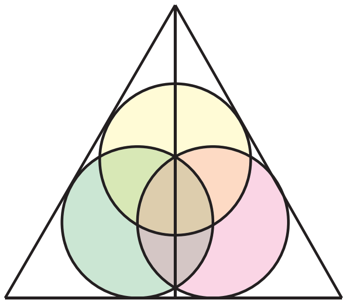
通り。

注

$S = 5$ は 1 通り, $S = 6$ は 5 通り, $S = 7$ は 15 通り, $S_8$ は 35 通り。よって, $5 \leqq S \leqq 8$ となる $(c_1, c_2, \cdots, c_5)$ の組は 56 通り。

**Stage 3**

(1)　図の 3 円の重なった部分を縦の軸のまわりに 1 回転したときの通過部分の体積になる。円の半径は 1 で, 3 円はそれぞれ他の 2 円の中心を通る。



$V_1$ は $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ の部分を $x$ 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積。

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \pi \left\{-\frac{1}{2}+\sqrt{1-x^2}\right\}^2 dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{5}{4}-x^2-\sqrt{1-x^2}\right) dx \\
&= \pi \left\{\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&= \pi\left(\frac{3}{8}\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

$V_2$ は, $x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq \frac{\sqrt{3}}{2},\ y \geqq 0$ の部分を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積。

$$\begin{aligned}
V_2 &= \pi \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} (1-x^2)\, dx \\
&= \pi \left\{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)\right\} \\
&= \pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)
\end{aligned}$$

求める体積は,

$$V = V_1+V_2 = \pi\left(\frac{2}{3}]-\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{1000V}{\pi} &= 1000\left(\frac{2}{3}-\frac{\pi}{6}\right) = 1000\,(0.666666\cdots-0.523598\cdots) \\
&= 143.06\cdots
\end{aligned}$$

であるから, $\boxed{\quad A \quad}$ には **143** が入る。

(2) $n \geqq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1)$$
$$= 43 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(2+n)$$
$$= n^2 + n + 41$$

であり, これは $n=1$ でも成り立つ。

$a_n$ の正の約数の個数が奇数になる場合は, $a_n$ が平方数であるから, $m$ を正の整数として, $a_n = m^2$, すなわち,

$$n^2 + n + 41 = m^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく。$a_{40} = 41^2$ であるから, $n \geqq 39$ の場合を考える。

$a_n = n(n+1) + 41$ は奇数であり, 奇数の平方数は 8 で割ると余りが 1 であるものに限るから, $n \equiv -1,\ 0 \pmod 8$, すなわち,

$$n = 7,\ 8,\ 15,\ 16,\ 23,\ 24,\ 31,\ 32,\ 39$$

に限る。これらを順に調べて,

$$a_7 = 7 \cdot 8 + 41 = 97$$
$$a_8 = 8 \cdot 9 + 41 = 113$$
$$a_{15} = 15 \cdot 16 + 41 = 281$$
$$a_{16} = 16 \cdot 17 + 41 = 313$$
$$a_{23} = 23 \cdot 24 + 41 = 593$$
$$a_{24} = 24 \cdot 25 + 41 = 641$$
$$a_{31} = 31 \cdot 32 + 41 = 1033$$
$$a_{32} = 32 \cdot 33 + 41 = 1097$$
$$a_{39} = 39 \cdot 40 + 41 = 1601$$

この中に平方数はない。

したがって, $\boxed{\text{B}}$ には **40** が入る。

注

$n^2 + n + 41$ が 39 以下の正の整数 $n$ に対して素数になることを知っていれば, もう少し速く結論に達することができる。

# 本選　問題

**Stage 1**

次の空欄を埋めよ。

(1)　関数 $f(x) = \sin 2x - 10\cos x - 6x + 13$ の区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ における最大値を $M$ とする。このとき，$100M$ の整数部分は $\boxed{\mathrm{A}}$ である。ただし，必要があれば，$\sqrt{3} = 1.73205\cdots$，$\pi = 3.14159\cdots$ を用いよ。

(例)
$M = 1.2345$ の場合は，**123** を答え，$M = 6.7$ の場合は，**670** を答えること。

(2)　$\alpha = \cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}$ のとき，

$$P = (1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)(1-\alpha^5)(1-\alpha^6)(1-\alpha^8)(1-\alpha^9) \times(1-\alpha^{10})(1-\alpha^{11})(1-\alpha^{12})(1-\alpha^{13})$$

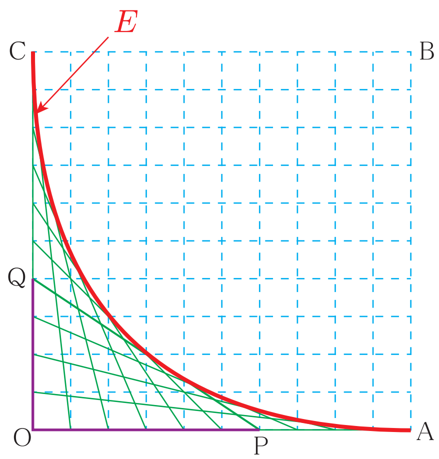
の値は $\boxed{\mathrm{B}}$ である。

**Stage 2**

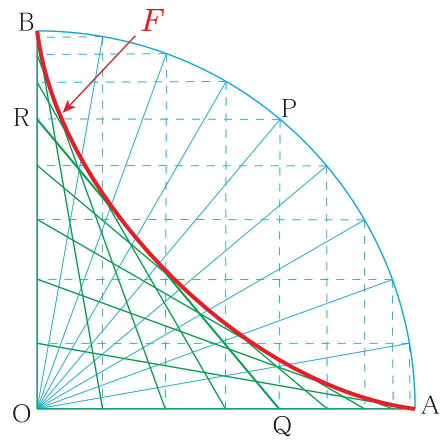
次の空欄を埋めよ。

(1)　次の 5 つの曲線 $E$, $F$, $G$, $H$, $I$ の中で放物線あるいは放物線の一部が現れる曲線をすべて答えると $\boxed{\mathrm{A}}$ である。ただし，包絡線とは，この問題ではすべての線分 PQ あるいは QR に接する曲線 (図の中の太い赤線) のことである。

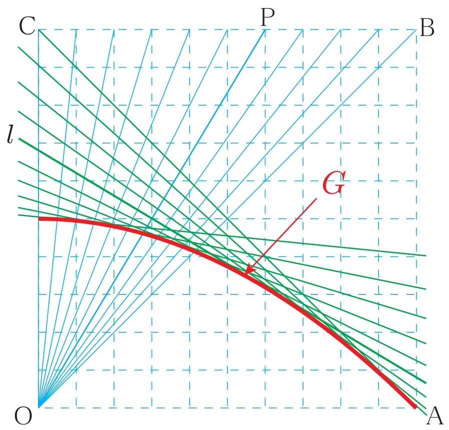
$\boxed{1}$　正方形 OABC の辺 OA 上に P, 辺 OC 上に Q をとり，OP + OQ = OA を満たしながら動く線分 PQ の包絡線 $E$



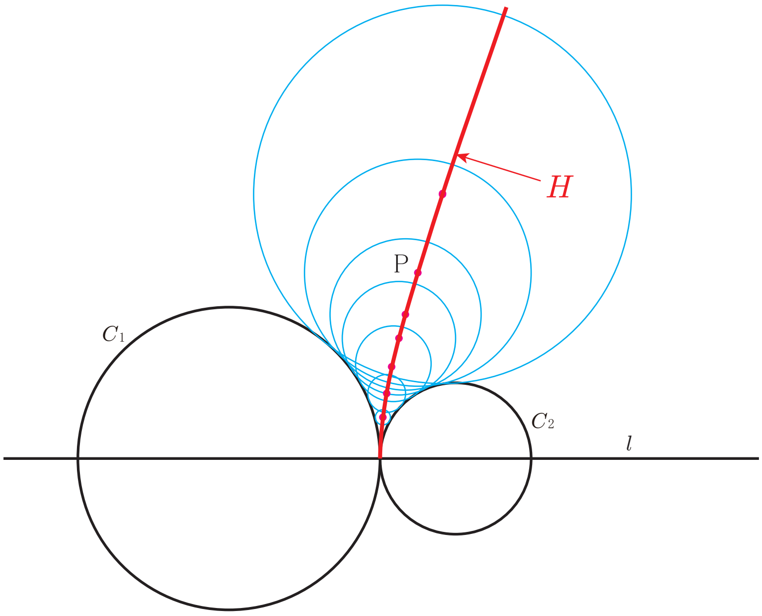
$\boxed{2}$　図のような四分円がある。弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上に任意の点 P をとり，P から OA, OB におろした垂線の足を Q, R とする。P がこの弧の上を動くとき，線分 QR の包絡線 $F$



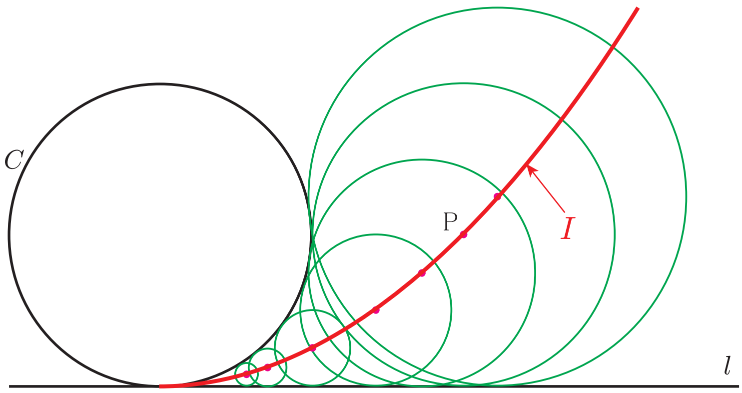

$\boxed{3}$　図のような正方形 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，OP の垂直二等分線を $l$ とする。P が辺 BC 上を動くときの $l$ の包絡線 $G$



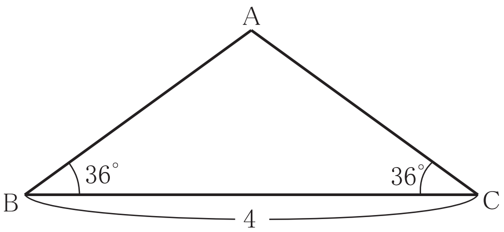
$\boxed{4}$　半径 2 の円 $C_1$ と半径 1 の円 $C_2$ が外接している。この 2 円に外接する円の中心を P とするときの P の軌跡 $H$

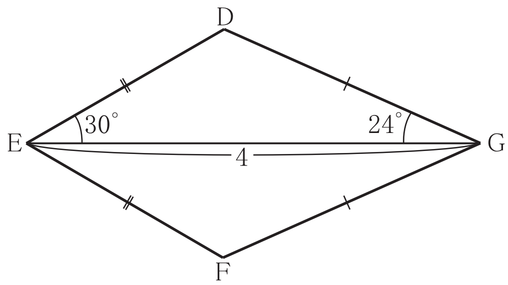



$\boxed{5}$　直線 $l$ に接している円を $C$ とする。直線 $l$ に接し, 円 $C$ に外接する円の中心 P の軌跡 $I$



(2)　次の図の三角形 ABC と四角形 DEFG の面積の和を $S$ とするとき, $S^2 = \boxed{\text{B}}$ である。




ただし, 三角形 ABC は,

$\mathrm{BC} = 4,\ \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB} = 36^\circ$

であり, 四角形 DEFG は,

$\mathrm{EG} = 4,\ \mathrm{DE} = \mathrm{EF},\ \mathrm{GF} = \mathrm{GD},\ \angle\mathrm{DEG} = 30^\circ,\ \angle\mathrm{DGE} = 24^\circ$

である。

**Stage 3**

以下の空欄を埋めよ。

(1)　$xy$ 平面上に曲線 $C : y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{4\sqrt{3}}{x}$ $(x > 0)$ がある。点 $\mathrm{A}(-2, 8)$ から $C$ に引いた接線を $l$ とし, $l$ と $y$ 軸との交点を P, $l$ と直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の交点を Q とするとき, $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を $S$ とする。このとき, $S^2 = \boxed{\text{A}}$ である。

(2)　$xyz$ 空間に $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,2,2)$ を通る直線 $l$ がある。点 $\mathrm{P}(4,2,-4)$, $\mathrm{Q}(5,4,7)$ を両端とする線分 PQ を $l$ のまわりに一回転したときに通過する面と 2 平面 $x + 2y + 2z = 0$, $x + 2y + 2z = 27$ によって囲まれた部分の体積 $V$ とする。このとき, $\dfrac{V}{\pi} = \boxed{\text{B}}$ である。

# 本選　解答

本選では, 第 1 次予選, 第 2 次予選がヒントになっています。結果だけを答えればよいので, 予選の考え方, 結果を使って解くと最短で解くことができます。

**Stage 1**

Stage 1 は, 受験数学に必要な注意力を測ります。(1) は $f'(x)=0$ を満たす $x$ で $f(x)$ は最大になるわけではありません (最小になります)。

(2) は, $P$ を表す式に $(1-\alpha^7)$ がないことに気がつかなければなりません。

(1)　$f(x)=\sin 2x-10\cos x-6x+13$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos 2x+10\sin x-6 \\ &= 2(1-2\sin^2 x)+10\sin x-6 \\ &= -4\sin^2 x+10\sin x-4 \\ &= -2(2\sin^2 x-5\sin x+2) \\ &= -2(2\sin x-1)(\sin x-2) \end{aligned}$$

したがって, $f(x)$ の増減は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

ここで,

$$f(0)=3,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi+13\ (>3)$$

であるから,

$$\begin{aligned} M &= -3\pi+13 \\ &= -3\times 3.14159\cdots+13 \\ &= -9.4247\cdots+13 \\ &= 3.5752\cdots \end{aligned}$$

よって, $100M$ の整数部分は **357** である。

(2)　$\alpha^{14}=1$ より, $\alpha^k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 13)$ は $x^{14}=1$ の $1$ ではない解である。また, $\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{13}$ はすべて異なるから,

$$x^{14}-1=(x-1)(x^{13}+x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1)$$

より,

$$x^{13}+x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1=(x-\alpha)(x-\alpha^2)(x-\alpha^3)\cdots(x-\alpha^{12})(x-\alpha^{13})$$

が成り立つ。$x=1$ を代入して,

$$1^{13}+1^{12}+1^{11}+\cdots 1+1=(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots(1-\alpha^{12})(1-\alpha^{13})$$

$$14=P(1-\alpha^7)$$

$$= 2P \qquad (\because \alpha^7 = -1)$$

$$\therefore \quad P = \mathbf{7}$$

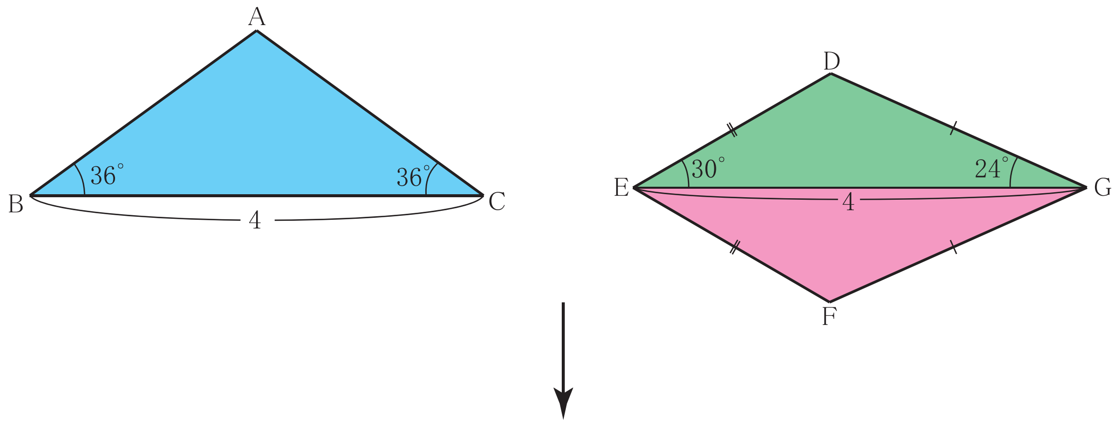
である。

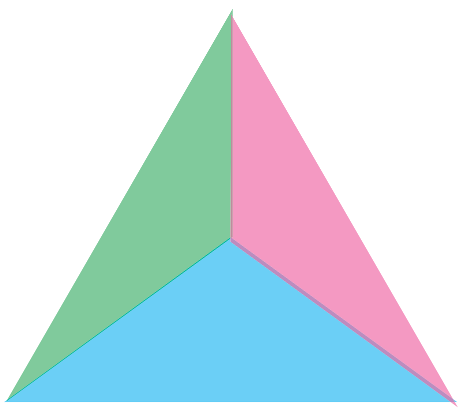
**Stage 2**

(1) $E$, $G$, $I$ が放物線。$F$ はアステロイド。$H$ は双曲線。

$\boldsymbol{E,\ G,\ I}$

(2) △ABC, △DEG, △EFG は図のように移動すると, 1 辺の長さ 4 の正三角形ができる。



したがって,

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$$

であるから,

$$S^2 = \mathbf{48}$$

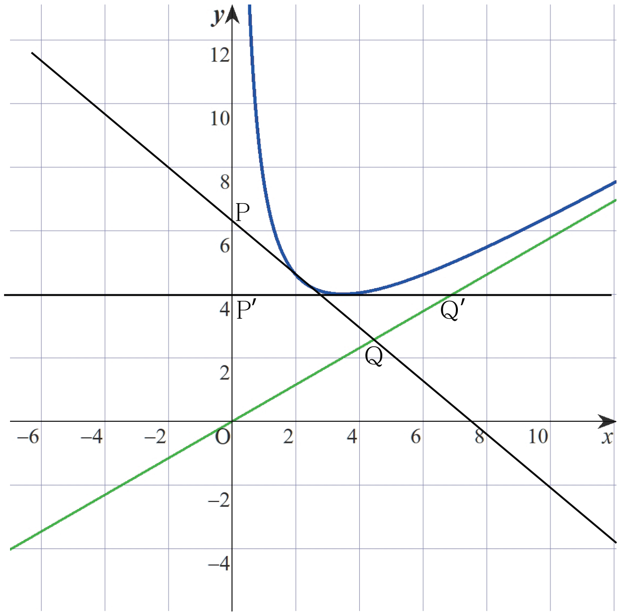
である。

**Stage 3**

この Stage は, 第 1 次予選, 第 2 次予選で扱った内容を使います。(1) は, 双曲線の接線と 2 つの漸近線で囲まれた部分の面積は一定であることを用います。

(2) は求める体積が 2 つの円すいの体積の和であることを用います。

(1) 曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{x}$ は双曲線であり, 次の図のようになる。




注

この曲線は, 第 2 次予選の Stage 1 (1) の曲線と $y$ 軸に対称であるから, 双曲線である。

双曲線接線と 2 つの漸近線で囲まれた部分の面積は, 接線によらず一定であるので, 求める面積は, 別の接線 $y=4$ と 2 つの漸近線 $x=0$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれる部分の面積に一致する。すなわち,

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OP'Q'}$$

である。ここで, $\mathrm{P'}(0,4)$, $\mathrm{Q'}(4\sqrt{3},4)$ であるから,

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{OP'Q'}\\&=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}\\&=8\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって,

$$S^2=\mathbf{192}$$

である。

(2)　Q から直線 $l$ におろした垂線の足は H(3, 6, 6) であり,

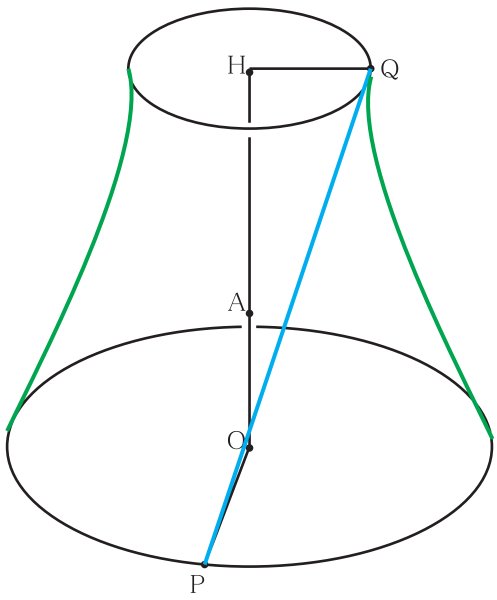
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}4\\2\\-4\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{HQ}}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

である。これらは,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HQ}}=0$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=6,\quad |\overrightarrow{\mathrm{HQ}}|=3,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=9$$

満たすから, 次のような位置にある。




したがって,

$$V=\frac{\pi}{3}(6^2+3^2)\cdot 9 \qquad \text{(第 1 次予選の Stage 4 の結果を用いた。)}$$

$$=135\pi$$

$$\therefore\quad \frac{V}{\pi}=\mathbf{135}$$