受験数学コンクール 2024　第 1 次予選問題

第 1 次予選は Stage 1 から Stage 4 までで構成されています。各 Stage の問題を解き, 定められた方法で各 Stage の解答確認ファイルを開くためのパスワードを完成させてください。解答確認ファイルを開くと登録画面に必要な正解文字列が表示されます。

以下, 解答するにあたっての注意事項です。

(1) 各問題の中にある $\boxed{\text{A}}$ などに入る文字はアルファベットと数字, – などの記号です。大文字, 小文字などを間違えずに半角で入力してください。

(2) 答の枠を埋めればよいので, 高校数学の範囲外の知識を用いてもかまいません。また, 高校数学の知識が必ずしも必要になるわけでもありません。

(3) **「整数部分」の定義**
このコンクールに限っては, 実数 x の「整数部分」は次のように定義することとします。

- $x \geqq 0$ のとき
  x の整数部分とは, **$\boldsymbol{x}$ 以下の最大の整数**, すなわち $[x]$ とします。([ ] はガウス記号)

  (例) 3.45 の整数部分は 3 であり, 6 の整数部分は 6 とする。

- $x \leqq -1$ のとき
  x の整数部分とは, $\boldsymbol{-[-x]}$ とします。

  (例) -3.21 の整数部分とは, -3 であり, -5 の整数部分は, -5 である。

- $-1 < x < 0$ の整数部分は -0 と定義します。(0 ではありません。) なお, 0 の整数部分は 0 と定義します。

  (例) -0.4 の整数部分は -0 とする。

Stage 1

以下の問いに答えよ。

(1)　どのような実数 a に対しても

$$x^4-(2a-k)x^3+(a^2-ka+2)x^2-(2a-k)x+1=0$$

を満たす実数 x が存在するような正の数 k の最小値は, $\boxed{\text{A}}$ である。

(2)　すべての実数 x に対して,

$$x^4-\frac{4}{3}(a+4)x^3+2(4a+3)x^2-12ax-5a+4 \geqq 0$$

が成り立つような実数 a に対し, $10a$ の範囲は,

$$\boxed{\text{B}} \leqq 10a \leqq \boxed{\text{C}}$$

である。

(解答注意)

B または C が整数でない場合は, 整数部分を記してください。

(例 1) $2.34 \leqq a \leqq 5.68$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には 23, $\boxed{\text{C}}$ には 56 が入る。

$-3.456 \leqq a \leqq 4$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には, -34, $\boxed{\text{C}}$ には 40 が入る。

また, 条件を満たす a が一つの実数のみの場合は, B と C には同じ値を入れてください。

(例 2) $a=3$ の場合は, $\boxed{\text{B}}$ には 30, $\boxed{\text{C}}$ にも 30 が入る。

Stage 1 の問題が解けた人はここをクリック

注

クリックするとパスワードが要求されるので, ここに

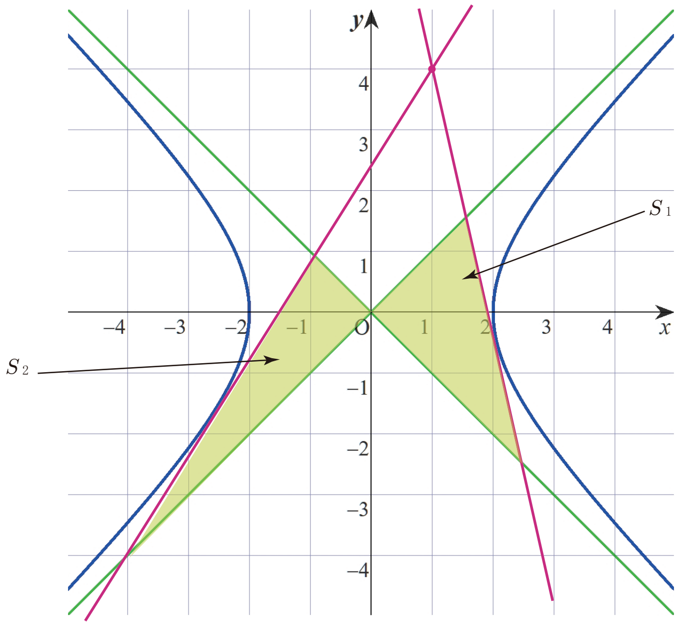
A(A の答)B(B の答)C(C の答)

を入力します。例えば, A の答が 123, B の答が -23, C の答が 34 の場合は, **A123B-23C34** を入力します。正解すれば, Stage 1 の解答確認ファイルが開きます。

Stage 2

以下の問いに答えよ。

(1)　双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ を H とする。点 $(1, 4)$ から H に 2 本の接線 l_1, l_2 を引くことができるが, l_i $(i = 1, 2)$ と H の 2 本の漸近線で囲まれる三角形の面積を S_i とするとき,
$S_1 + S_2 = \boxed{\text{A}}$ を求めよ。



(2)　3 辺の長さが 3, 4, $\sqrt{13}$ である三角形 T_1, 3 辺の長さが 2, 3, $\sqrt{7}$ である三角形 T_2, 3 辺の長さが $2\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$ である三角形 T_3 がある。この 3 つの三角形の面積の和を S とおくとき, $S^2 = \boxed{\text{B}}$ を求めよ。

Stage 2 の問題が解けた人はここをクリック

注

クリックするとパスワードが要求されるので, ここに

A(A の答)B(B の答)

を入力します。例えば, A の答が 123, B の答が 456 の場合は, **A123B456** を入力します。正解すれば, Stage 2 の解答確認ファイルが開きます。

Stage 3

以下の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上に原点 O$(0,0)$ を中心とする半径 1 の円 C と中心 $(n,0)$, 半径 n の円 D_n がある。ただし, n は正の整数である。

C と D_n の共通接線のうち傾きが正であるものを l_n とし, l_n と D_n の接点を P_n とする。

このとき,

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} < \frac{1}{100}$$

を満たす最小の n を求めると $\boxed{\text{A}}$ である。

(注) $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ は 2 点 P_n と P_{n+1} の距離である。

(2)　x, y, z, w は正の整数で, 次の式を満たす。

(a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=1$

(b) $1<x<y<z<w$

このような x, y, z, w の組の中で $x+y+z+w$ の最小値は $\boxed{\text{B}}$ であり, $x+y+z+w$ の最大値は $\boxed{\text{C}}$ である。

Stage 3 の問題が解けた人はここをクリック

注

クリックするとパスワードが要求されるので, ここに

A(A の答)B(B の答)C(C の答)

を入力します。例えば, A の答が 12, B の答が 34, C の答が 56 の場合は, **A12B34C56** を入力します。正解すれば, Stage 3 の解答確認ファイルが開きます。

Stage 4

以下の問いに答えよ。

(1) 底面の半径が 3, 高さが 6 の円すい K_1 と底面の半径 5, 高さが 6 の円すい K_2 がある。K_1, K_2 の体積を順に V_1, V_2 とするとき, $\dfrac{1}{\pi}(V_1+V_2)=\boxed{\text{A}}$ を求めよ。

(2) 上底面の半径が 3, 下底面の半径が 5, 高さが 6 の円すい台の体積を V_3 とするとき, $\dfrac{1}{\pi}V_3=\boxed{\text{B}}$ を求めよ。

(3) xyz 空間に 2 点 $\mathrm{P}(5,0,0)$, $\mathrm{Q}(0,3,6)$ がある。線分 PQ を z 軸のまわりに一回転したときに通過する面と 2 平面 $z=0$, $z=6$ によって囲まれる部分の体積を V_4 とするとき, $\dfrac{1}{\pi}V_4=\boxed{\text{C}}$ を求めよ。

Stage 4 の問題が解けた人はここをクリック

注

クリックするとパスワードが要求されるので, ここに

A(A の答)B(B の答)C(C の答)

を入力します。例えば, A の答が 12, B の答が 34, C の答が 56 の場合は, **A12B34C56** を入力します。正解すれば, Stage 4 の解答確認ファイルが開きます。