となるから a_n を最小にする n は

3　　　　　　……(答)

27

a_n が次のように与えられているとき，a_n を最大にする n を求めよ．

(1) $a_n = n\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_n = n^2\left(\frac{8}{9}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

解答

(1) $a_{n+1} - a_n = (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - n\left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \left\{(n+1)\cdot\frac{4}{5} - n\right\}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{-n+4}{5}$$

したがって，

$1 \leqq n \leqq 3$ のとき　$a_{n+1} - a_n > 0$　$\therefore$　$a_n < a_{n+1}$

$n = 4$ のとき　$a_{n+1} - a_n = 0$　$\therefore$　$a_n = a_{n+1}$

$n \geqq 5$ のとき　$a_{n+1} - a_n < 0$　$\therefore$　$a_n > a_{n+1}$

となるから，

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = a_5 > a_6 > a_7 > \cdots$$

よって，a_n を最大にする n は

4 と 5　　　　　　……(答)

(2) $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1} - n^2\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^n \left\{(n+1)^2\cdot\frac{8}{9} - n^2\right\}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot \frac{-n^2 + 16n + \cancel{64}\ 8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot \frac{-\{n - (8 + \cancel{8}\sqrt{2})\}\{n - (8 - \cancel{8}\sqrt{2})\}}{9}$$

6

したがって，

◀ $\left(\frac{8}{9}\right)^n \times \frac{-(n-8)^2 + \cancel{128}\ 72}{9}$ と変形して考える手もある．

◀ $8 + \cancel{8}\ 6\sqrt{2} = \cancel{19.2}\ 16.47\cdots$

$1 \leqq n \leqq \cancel{19}\ 16$ のとき　$a_{n+1} - a_n > 0$　$\therefore$　$a_n < a_{n+1}$

$n \geqq \cancel{20}\ 17$ のとき　$a_{n+1} - a_n < 0$　$\therefore$　$a_n > a_{n+1}$

よって，

$$a_1 < \cdots < a_{\cancel{19}\ 16} < a_{\cancel{20}\ 17} > a_{\cancel{21}\ 18} > a_{\cancel{22}\ 19} > \cdots$$

となるから a_n を最大にする n は

20　17　　　　　　……(答)

28

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$a_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n\left(\frac{3}{11}\right)^n$ とする．このとき，a_n を最小にする n を求めよ．

解答

$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$a_n > 0$ である．

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{{}_{2n+2}\mathrm{C}_{n+1}\left(\frac{3}{11}\right)^{n+1}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n\left(\frac{3}{11}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}}\cdot\frac{3}{11}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot\frac{3}{11}$$

$$= \frac{3}{11}\cdot\frac{2(2n+1)}{n+1}$$

よって，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 = \frac{6(2n+1) - 11(n+1)}{11(n+1)}$$

$$= \frac{n-5}{11(n+1)}$$

となるから

$1 \leqq n \leqq 4$ のとき　$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$　$\therefore$　$a_n > a_{n+1}$

①数列と数列の和