

3.3.4 根号を含む式で表される不等式

【例題 3-8】

次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{x+4} < -2x+13$

(2) $\sqrt{x+3} \geq 2x$

解法のポイント

結果的に

(1) は $\sqrt{A} < B \iff \{A \geq 0 \text{ かつ } B > 0 \text{ かつ } A < B^2\}$

(2) は $\sqrt{A} \geq B \iff \{A \geq 0 \text{ かつ } (B \leq 0 \text{ または } (B > 0 \text{ かつ } A \geq B^2))\}$

に当てはめれば解くことはできるが、これを丸暗記するのではなく、解答のように意味を考えつつ解いた方が記憶に残りやすいであろう。

解答

(1) $\sqrt{x+4} < -2x+13$ ①

根号内が0以上であることから、

$x+4 \geq 0 \therefore x \geq -4$ ②

また、 $\sqrt{x+4} \geq 0$ より、

$-2x+13 > 0 \therefore x < \frac{13}{2}$ ③

でなければならぬ。

②かつ③のもとで①の両辺を2乗すると、

$x+4 < (-2x+13)^2$

$4x^2 - 53x + 165 > 0$

$(x-5)(4x-33) > 0$

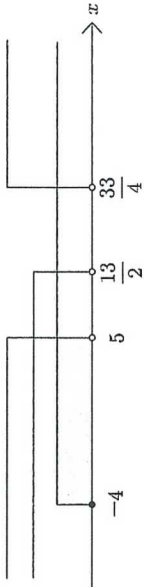
$\therefore x < 5$ または $x > \frac{33}{4}$ ④

したがって、②かつ③かつ④より、

$-4 \leq x < 5$ (答)



②かつ③かつ④を満たす部分を数直線で表すと次のようになる。



(2) $\sqrt{x+3} \geq 2x$ ①

根号内が0以上であることから、

$x+3 \geq 0 \therefore x \geq -3$ ②

また、②のとき $\sqrt{x+3} \geq 0$ より

$2x \leq 0 \therefore x \leq 0$ ③

であれば、①は成り立つ。

次に②のもとで、 $x > 0$ である場合を考える。

①の両辺を2乗すると、

$x+3 \geq 4x^2$

$4x^2 - x - 3 \leq 0$

$(4x+3)(x-1) \leq 0$

$\therefore x \leq -\frac{3}{4}$ または $x \geq 1$

$x > 0$ より

$0 < x \leq 1$ ④

を得る。

以上より、②かつ③または④から、

$-3 \leq x \leq 0$ または $x \geq 1$ (答)

である。

◀ この場合、①の両辺は0より大きくなるから両辺を2乗しても不等号の向きは変わらない。

基本演習

93

次の不等式を解け。

(1) $\sqrt{4-x^2} < \sqrt{3x}$ (2) $\sqrt{x^2-2x} > \frac{1}{2}x+1$