幸せ物語 2011
第 2 話　横と縦

****

　ベクトルを成分で表すとき, 横ベクトルで書く場合と縦ベクトルで書く場合があります。これは参考書によってもどちらを使うかが異なりますが, それぞれどのような特徴があるのでしょうか。また, 注意点はどのようなことなのでしょうか。

****

　昼休みに幸弥君が珍しく席に座って何やら考え事をしているようです。それを見て, 幸子さんが話しかけました。

★　　　　　　　★

幸子: ねえ, 幸弥! 考え事をしているようだけど ⋯⋯

幸弥: あ, う, うん。

幸子: そういえば, 「今年は数学を真剣に勉強しなくては」なんて言っていたけど, 何か難しい問題を考えているの?

幸弥: いや, そうじゃなくて, 「横」という漢字について考えていたんだ。

幸子: なーんだ。数学じゃないのね。

幸弥: 「なーんだ」って, あのさ ⋯ 。あのね, 「横」ってあまり言い意味がないんじゃないかと思って。

幸子: そういえば,

「横暴」「横柄」「横行」「横領」

なんてあるね。で, だから何なの?

幸弥: いやー。僕, 昔からお母さんから何か叱られたときに「横」のつく言葉で怒られていたなと思って。今朝も「横」のつく言葉で怒られて, でも, それが思いだせなくて。
　まあ, どうでもいいんだけどね。でも気になっちゃって。

幸子: 今朝のことも忘れたの? やばいんじゃない?

幸弥: うーん。「横 ⋯ 」なんだっけ? 気になって ⋯

幸子: ねぇ, それってもしかして「よこしま」じゃないの?

[後ろから, 伊達君が話しかけてきました。]

伊達: 福澤さん。「よこしま」は漢字では「邪」だよ。

★ ★

伊達君がこのように言ったあとに, 5 時間目開始のチャイムが鳴りました。5 時間目は数学の時間です。

まもなく証先生が教室に入ってきました。数学演習の時間です。幸弥君は相変わらず「横」を含む単語を思い出そうとしていました。

★ ★

幸弥: (つぶやくように) 横, 横, ⋯ うーん。

[幸弥君の様子に証先生が気がつきました。]

証先生: 福原君, さっきから「横, 横, 横」とつぶやいていませんか?

[証先生の話しかけられて幸弥君は少し慌てたようです。]

幸弥: (動揺した感じで) は, はい。よ, 横って, ⋯ あ, あの横ベクトルです。横ベクトルってどうして横ベクトルなのかなー。なんて。

太成: おい, 福原, 自分で言っていることわかってんのかー。

幸弥: わ, わかっているよ。横ベクトルと縦ベクトルとがあって, 先生! どっちも使っていいのですか?

[幸弥君の咄嗟(とっさ)のいい加減な対応に対して, 証先生は真面目に答えだしました。]

証先生: 問題に特に指定はない場合はよいでしょう。ただ, 問題文の中に横ベクトルがあれば, 解答の中では横ベクトルのままの方がよいでしょうね。ただ, 計算上は縦ベクトルの方が同じ成分が同じ「高さ」にあるので計算過程はわかりやすいかもしれません。これは, 人によりますね。

例えば, $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(3,4,5)$ のとき, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を横ベクトルで書くと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,2,3)+t(3,4,5)=(1+3t,2+4t,3+5t)$$

となりますが, これを縦ベクトルで書くと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3t \\ 2+4t \\ 3+5t \end{pmatrix}$$

のようになります。

幸子: うーん。私は, 縦の方が見やすいわ。

月里: 僕は, 今まで横で書いてきたから横に慣れているけど。

太成: 俺は, どっちでも大丈夫だぜ!

幸子: (ボソッと) もう, 何気に自慢しているように聞こえるのよね。

日向: 先生, でも, 教科書には横ベクトルしかありません。だから, 横ベクトルで統一すればいいんじゃないですか?

証先生: そうもいかないんです。どうしても縦ベクトルを使わなければならないことがあるんですよ。

幸子: それは, どういうときですか?

証先生: 1 次変換のときです。例えば, 点 X(x, y) に対し, $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で変換するとき,

$$A\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり, これは, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x, y)$ のようには表しません。

太成: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x, y)$ なら計算できないもんな。

幸弥: へぇーそうなの。じゃあ, $(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすればいいんじゃないの?

証先生: 福原君, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を計算するとどうなりますか?

幸弥: ええと,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

ですよね。確か。

証先生: はい。だから, 点 (x, y) は点 $(ax+by, cx+dy)$ に変換されることになります。では, $(x \ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ はどうなりますか?

幸弥: ええと …. 。あまりこの計算はしたことがないので $\cdots$

幸子: それは,

$$(x \ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax+cy \ \ bx+dy)$$

となる。だから, 点 (x, y) は点 $(ax+cy \ \ bx+dy)$ に変換される。

日向: あれ? すると, さっきは (x, y) は $(ax+by, cx+dy)$ にうつったのに, 今度は $(ax+cy, bx+dy)$ にうつるから結果が異なるよね。

証先生: そうなんです。だから, どちらからかけてもよいというわけにはいかないんです。$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と同じ結果を得ようとするなら, $(x \ \ y)$ には $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の転置行列である $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ をかけなければなりません。

幸弥: なんだかよくわからなくなってきたけど, つまり, 縦ベクトルでなければならないときがあるってことか。

証先生: そうですね。横ベクトルだけでは対応できないときがあるのです。

幸子: だったら, 縦ベクトルだけにすればよいのに。

証先生: 縦ベクトルの欠点は, 行数を必要とするということです。これは, 書籍を作る上だけの問題なのですが, ページ制限がある本などには向きません。また, 問題集の中には, 1 題につき解説は 1 ページと決めてあるものもあるので, そのような本にとっては縦ベクトルは効率が悪いのです。

幸弥: 結局, 引き分けなのかな。

証先生: ただ, 皆さんの次の課程からは「行列」が完全になくなりますから, そうなると, 縦ベクトルでなければならない場面がなくなるので, 高校数学の上では縦ベクトルは衰退していくかもしれませんね。

[証先生の声の調子が少しだけトーンダウンしたので, これに気がついた幸子さんは証先生に聞き返しました。]

幸子: 先生, 縦ベクトルを使わざるを得ない理由はわかりましたが, それ以外には縦ベクトルの方がいいということあるのですか?

証先生: ありますよ。例えば, 横ベクトルの場合,

点 A の座標が (a, b) のとき,
点 A の位置ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a, b)$

です。何か気がついたことはありませんか?

日向: ええと, A の座標と A の位置ベクトルは表面的な記法は同じです。

証先生: そうです。ですから, 単に (a, b) と書いた場合, 座標として書いたのか, ベクトルとして書いたのかがわかりません。これに対して縦ベクトルの場合は,

点 A の座標が (a, b) のとき,

点 A の位置ベクトルは, $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

ですので, 「ベクトルは縦で書くよ」と言っておけば, 座標として書いたのかベクトルとして書いたのかが混乱しません。

幸弥: 先生, 座標とベクトルの区別は必要なんですか?

証先生: もちろんですよ。例えば, 座標として書いてある場合は,

$$(a, b) + (c, d)$$

は定義されません。

幸弥: え? なんで?

太成: おいおい. 「点」と「点」を足し算するっていったい何なんだよ! いつ点の足し算を決めたんだよ。

証先生: まあ, そういうことですね。それに対して, ベクトルとして書いてある場合は,

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

となります。

幸子: つまり, 計算はできるってことですね。

証先生: はい。

幸弥: 点と点は足し算はできない, でもベクトルとベクトルは足し算ができる。横ベクトルを答案の中に混ぜると, (a,b) は座標として表されているのか点として表されているのかの判別がつかない $\cdots$

証先生: 先生はね, 次のような書き方は皆さんにはやめてほしいのです。
まず, 次のような問題があったとします。

【例題 2 – 1 】
xy 平面上に点 $\mathrm{A}(3,1)$ がある。この点から x 軸方向に 3, y 軸方向に 2 だけ移動した点の座標を求めよ.

これに対する解答が次のようなものであったとします。

☆————————————————————☆

解答?

求める点を X とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= (3,1)+(3,2)\\ &= (6,3) \qquad \cdots\cdots (答)\end{aligned}$$

☆————————————————————☆

幸弥: これのどこがまずいのかな。

幸子: 私もよくわからないわ。だって, 点 $(3,1)$ から $(3,2)$ だけ移動すると $(6,3)$ だよね。

証先生: この「解答?」のまずい点は, 最後の 「$\cdots\cdots$ (答)」の部分です。この行にある $(6,3)$ は座標ですか? ベクトルですか?

幸弥: うーん。

証先生: 福原君はまだ「座標」と「ベクトル」区別ができていないようですね。では, 上の解答を「横ベクトル」ではなく「縦ベクトル」を使って書いてみると次のようになります。

☆————————————————————————☆

解答?

求める点を X とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}\end{aligned}$$

☆————————————————————————☆

幸子: つまり, 最後の $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ は座標じゃなくてベクトルなのね。

証先生: そうです。ですから, 最初の解答でも「…… (答)」が指しているものはベクトルなのですよ。このように座標とベクトルの区別がつかないで, 自分はできていると思っている人は「幸せな人」なんですよ。

[証先生が「幸せな人」と言うときは, いつも証先生が力を入れて強調したいときであることを 3 年 4 組の生徒達は知っています。生徒達の目は先ほどよりも真剣になりました。]

幸弥: (ボソッと, 幸子に向かって) 先生, 僕の方を向いて幸せな人って言ったよ。

幸子: (ボソッと) そうよ。今日の授業では幸弥が一番幸せな人なんだから。先生は, 横ベクトルだけになると, 座標とベクトルの区別がつかない人がたくさん出てくるんじゃないかと言って心配しているんじゃないの?

月里: 先生! では, どのように解答を書けばよかったのですか。

証先生: そうですね。例えば次のようになります。一応, 横ベクトルを使って書いてみましょう。

☆————————————————————————————————☆

解答

求める点を X とおくと,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OX}} &= (3,1)+(3,2)\\ &= (6,3)\end{aligned}$$

である。(点 X の位置ベクトルが $(6,3)$ なので) 点 X の座標は,

$(6,3)$ …… (答)

である。

☆————————————————————————————————☆

幸子: つまり, 最後の $(6,3)$ は「座標」の意味で, その 2 行上の $(6,3)$ は「ベクトル」の意味で書いてあるのね。

幸弥: (ボソッと) 「横」の話から予想外の展開になったな。ふぅー。

[少し安心した幸弥君を見て証先生は言いました。]

証先生: そう言えば, 福原君。安心している場合ではないですよ。放課後職員室に来てください。

幸弥: ゲー! 何だろう。また, 「幸せな人」って言われるのかなー。

★ ★

少したって 5 時間目が終わりました。

★ ★

放課後, 幸弥君は職員室の証先生のところに行き, 勉強の姿勢について言われたようです。

そのころ幸子さんは, もうすぐ行われる球技大会の準備で, 新しくできた記念館にいました。記念館は, 校舎を立て直したときに新しく創設された建物でバドミントンのコートが 4 面入るくらいの広さです。

少しして, そこに, 証先生の話を終えた幸弥君が来ました。

★ ★

幸子: あ, 幸弥。ねえ, この記念館って, 前にはなかったものよね。

幸弥: そうだね。それで, 僕にはこの天井が奇妙だよ。

幸子: そうそう。何か, お椀を逆さにした形にしたような形だし。

[後ろから伊達君が話しかけてきました。]

伊達: どうやら, この天井って半楕円球のようなんだ。

幸弥: 何? その半楕円球って?

伊達: 楕円を対称軸のまわりに一回転してできる曲面が楕円球で, 半楕円球っていうのはその半分。

幸弥: ねえ, その半楕円球って覚えなくてはだめ?

伊達: 大学入試の話をしているならば特に必要はないと思うけど。そんなことより, 半楕円球の天井って注意がいるんだ。

幸子: 何? その注意って?

幸弥: なーんだ。入試に出ないならとりあえずいいか。

[それを聞いて, 伊達君は冷めた感じで去って行ってしまいました。]

幸子: もう! 幸弥ったら。伊達君が珍しく話しかけてきたと思ったのに。

幸弥: だって, 余計なことまで覚えたら混乱するし。

幸子: ところで, さっきまで, 証先生に何て言われていたの?

幸弥: うーん。それは, この前の微分のテストのときに, 商の微分公式なんて覚えなくてもいいと思ってさ, 全部, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ を $f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$ と変形して積の微分公式を使ったんだ。

幸子: つまり,

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を覚えないで, 毎回,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \left\{f(x) \times \frac{1}{g(x)}\right\}' \\ &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{-\frac{1}{\{g(x)\}^2}\right\} g'(x)\end{aligned}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

という過程を踏んでいたのね。

幸弥: うん。

幸子: 証先生, 覚えておくように言っていたわ。数学は「暗記だけの科目ではないけど, 使用頻度の高いものは覚えておかなければだめ」だって。それで, また「幸せな人」って言われたのね。

幸弥: ううん, 僕が, 公式を覚えるのを面倒くさがっていたので, 今度は,

「福原君, **横着**は勉強の最大の敵です!」

って言われちゃってさあー。

幸子: 横着かあ (笑)。あ, これも「横」で始まるわね。

幸弥: そうそう, それが, さっき思い出せなかったお母さんが言われた「横」で始まる注意だったんだ。今日は一日, 「横」に振り回されたよ。

幸子: 今後も幸弥は「横」に注意ね。

(幸せ物語　つづく)