D.1.3　3 次正方行列の行列式

2 次の場合と同じようにして, 3 次の正方行列の行列式を求めてみよう. $f(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3})$ は実数値をとり, 条件 (D) を満たす関数とする.

まず, $\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく. すると (D – 4) より

$$f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) = 1$$

である. ここから, $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ の任意の 2 つを 1 回だけ入れ換えると (D – 1) より f の値は (-1) 倍されるから

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) &= -1 \\ f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) &= -1 \\ f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) &= -1 \end{aligned}$$

となる. また, $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ の任意の 2 つをもう一度入れ換えると f の値はさらに (-1) 倍されるから, 新たに

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) &= 1 \\ f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) &= 1 \end{aligned}$$

を得る (この次のページで使う).

さて, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を求めよう. $\boldsymbol{a_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくと, $A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ と表せるから, $\det A$ は $f(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ を求めるとよい. $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_1} &= a_{11}\boldsymbol{e_1} + a_{21}\boldsymbol{e_2} + a_{31}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{a_2} &= a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e_2} + a_{32}\boldsymbol{e_3} \\ \boldsymbol{a_3} &= a_{13}\boldsymbol{e_1} + a_{23}\boldsymbol{e_2} + a_{33}\boldsymbol{e_3} \end{aligned}$$

を満たすから,

$$\begin{aligned}
& f(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) \\
&= f(a_{11}\boldsymbol{e_1} + a_{21}\boldsymbol{e_2} + a_{31}\boldsymbol{e_3}, a_{12}\boldsymbol{e_1} + a_{22}\boldsymbol{e_2} + a_{32}\boldsymbol{e_3}, a_{13}\boldsymbol{e_1} + a_{23}\boldsymbol{e_2} + a_{33}\boldsymbol{e_3}) \\
& \qquad \text{((D – 2), (D – 3) の分配法則を用いて)} \\
&= \ a_{11}a_{12}a_{13}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + a_{11}a_{12}a_{23}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) + a_{11}a_{12}a_{33}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{11}a_{22}a_{13}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) + a_{11}a_{22}a_{23}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) + a_{11}a_{22}a_{33}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{11}a_{32}a_{13}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) + a_{11}a_{32}a_{23}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) + a_{11}a_{32}a_{33}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{21}a_{12}a_{13}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + a_{21}a_{12}a_{23}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) + a_{21}a_{12}a_{33}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{21}a_{22}a_{13}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) + a_{21}a_{22}a_{23}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) + a_{21}a_{22}a_{33}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{21}a_{32}a_{13}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) + a_{21}a_{32}a_{23}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) + a_{21}a_{32}a_{33}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{31}a_{12}a_{13}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_1}) + a_{31}a_{12}a_{23}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) + a_{31}a_{12}a_{33}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{31}a_{22}a_{13}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) + a_{31}a_{22}a_{23}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}) + a_{31}a_{22}a_{33}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{31}a_{32}a_{13}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) + a_{31}a_{32}a_{23}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) + a_{31}a_{32}a_{33}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \qquad \text{(この中で実際に残るのは, 同じベクトルを含まない色網部分であるから)} \\
&= \ a_{11}a_{22}a_{33}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}) + a_{11}a_{23}a_{32}f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) + a_{21}a_{12}a_{33}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_3}) \\
& \quad + a_{21}a_{32}a_{13}f(\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) + a_{31}a_{12}a_{23}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) + a_{31}a_{22}a_{13}f(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}
\end{aligned}$$

となり, これが $\det A$ である.

【3 行 3 列の行列の行列式】

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3 行 3 列の行列の行列式については, 付録 C で扱っているので, ここではこれ以上扱わないことにする.

さて, これまでと同様に考えて, 4 次以上の行列についても行列式を求めることはできるが, その結果を次の節で記しておこう. 結果を確認するには, 3 次の場合のように分配法則を使っていくことになる.