(2)　誤り.

これは反例をあげておけばよい. 例えば $A = I$ とすると, その固有方程式は

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\quad (\lambda - 1)^2 = 0 \\ &\therefore \quad \lambda = 1 \quad (\text{重解}) \end{aligned}$$

となるが, この場合, $\overrightarrow{0}$ 以外の任意のベクトルが固有ベクトルである.

(3)　正しい.

仮に 1 次独立な 2 つのベクトル $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ が

$$A\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{p},\ A\overrightarrow{q} = \alpha\overrightarrow{q}$$

を満たしたとしよう. すると, 任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ は $\overrightarrow{x} = s\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{q}$ と表せるから $\overrightarrow{x}$ の像は

$$\begin{aligned} A\overrightarrow{x} &= A(s\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{q}) \\ &= sA\overrightarrow{p} + tA\overrightarrow{q} \\ &= s(\alpha\overrightarrow{p}) + t(\alpha\overrightarrow{q}) \\ &= \alpha(s\overrightarrow{p} + t\overrightarrow{q}) \\ &= \alpha\overrightarrow{x} \end{aligned}$$

となり, これを任意のベクトル $\overrightarrow{x}$ に対しこの条件を満たす行列は

$$A = \alpha I$$

であるが, これは $A$ がスカラー行列ではないことに反する.

よって, 固有方程式が重解をもち, $A$ がスカラー行列ではないときは $A$ の固有値はすべて 1 次従属である. ■

この例題からわかったことをまとめておくと次のようになる.

**【固有値と固有ベクトルの性質】**

- 異なる固有値に対する固有ベクトルは 1 次独立である.
- 固有値を 1 個しかもたないスカラー行列ではない行列の固有ベクトルは, すべて 1 次従属である.



## 4.2　対角化と $n$ 乗計算

行列 $A$ にある行列 $P$ を用いて (この $P$ は $A$ によって決まる),

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

の形にすることを考えよう. このように, ある $P$ を用いて $A$ を (4.6) の右辺のような形に変形することを「行列 $A$ を**対角化**する」という. 実は, どのような行列も対角化できるわけではない[7]. ここでは,

- どのような行列が対角化できるのか
- 与えられた行列 $A$ に対し, どのような $P$ を用いて $P^{-1}AP$ とすると対角化できるのか
- 対角化を利用して行列の $n$ 乗を求められないか

について考えてみよう.

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有値を $\alpha$, $\beta$ とし，固有値 $\alpha$ に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{p}$，固有値 $\beta$ に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{q}$ とする.

**1. $\alpha \fallingdotseq \beta$ の場合**

$A\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{p}$, $A\overrightarrow{q} = \beta\overrightarrow{q}$ であるから, これらをまとめると

$$\begin{aligned} A(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}) &= (\alpha\overrightarrow{p}, \beta\overrightarrow{q}) \\ &= (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. ここで，$P = (\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ とおくと　　(← $P$ は固有ベクトルを並べた行列)

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

両辺に左から $P^{-1}$ をかけて　　(← $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ は 1 次独立なので[8] $P^{-1}$ は存在する.)

---

[7] 対角化できる行列を**半単純**であるという.

[8] ▶▶ 例題 4－3 ▷▷参照.