例題 2 − 5

(1)　$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ のとき A^3 を求めよ．

(2)　$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ のとき A^{100} を求めよ．

解　答

(1) ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - 3A - 5I = O$ が成り立つ．この式を $A^2 = 3A + 5I$ の形で繰り返し用い，A^3 の次数を下げていく．

$$\begin{aligned} A^3 &= A \cdot A^2 \\ &= A(3A + 5I) \\ &= 3A^2 + 5A \\ &= 3(3A + 5I) + 5A \\ &= 14A + 15I \\ &= 14\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 & 14 \\ 98 & 43 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

答

(2)　ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - A + I = O$ が成り立つ．この両辺に $(A + I)$ をかけると

$$\begin{aligned} (A + I)(A^2 - A + I) &= O \\ \therefore \quad A^3 + I &= O \end{aligned}$$

となるから $A^3 = -I$ である．したがって，

$$\begin{aligned} A^{100} &= (A^3)^{33} \cdot A \\ &= (-I)^{33} \cdot A \\ &= -A \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

答

注

この問題では前の例題のように x^{100} を $x^2 - x + 1$ で割って余りを求めようとすると複素数の範囲の計算が必要になり面倒になる．$A^2 - A + I = O$ から $A^3 + I = O$ を思いついてほしい．

多項式の計算

例題 2 − 6

$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $(A - I)^n$ を求めよ．

解　答

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - 5A + 6I = O$ が成り立つ．そこで $(x-1)^n$ を $(x^2 - 5x + 6)$ で割った余りを考える．

$$(x-1)^n = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b \qquad \cdots\cdots ①$$

とおくと，両辺に $x = 2, 3$ を代入することで，$a = 2^n - 1$, $b = -2^{n+1} + 3$ を得るから ① は

$$(x-1)^n = (x^2 - 5x + 6)Q(x) + (2^n - 1)x + (-2^{n+1} + 3)$$

となり，x を A で置き換えて

$$\begin{aligned} (A - I)^n &= (A^2 - 5A + 6I)Q(A) + (2^n - 1)A + (-2^{n+1} + 3)I \\ &= (2^n - 1)A + (-2^{n+1} + 3)I \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^n + 1 \\ 2^{n+1} - 2 & -2^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

答

となる．