

東大入試模擬問題

数 学

(配点 120 点)

平成 22 年 2 月 16 日実施

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. この問題冊子は 15 ページある。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所を見いだし場合には手をあげて監督者にすみやかに申し出よ。
3. 解答には、必ず黒鉛筆 (または黒色シャープペンシル) を使用せよ。
4. 解答用紙の指定欄に、受験番号、氏名を記入せよ。
5. 解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入せよ。記入を誤った解答は、その解答に限り無効である。
6. 解答用紙の解答欄に、関係ない文字、記号、符号などを記入してはならない。また、解答用紙の欄外の余白には、何もしてはならない。これらに違反した答えは、無効とする。
7. この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはならない。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 1 問

a を正の数とする。このとき、不等式

$$0 \leq y \leq -\frac{1}{a^3}x(x-a)$$

を満たす x, y に対し、 $x+y$ の取り得る値の最大値を $M(a)$ で表す。

- (1) $M(a)$ を a で表せ。
- (2) a が正の数全体を変化するとき、 $M(a)$ の取り得る値の最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 2 問

$f(x) = \frac{1}{3}e^{1-x^2} + \frac{2}{3}$ とするとき、数列 $\{a_n\}$ は以下の条件で与えられる。

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $f'(x)$ の最大値を求めよ。
- (2) 任意の自然数 n に対し、

$$|a_{n+1} - 1| \leq r|a_n - 1|$$

を満たす 1 より小さい正の数 r が存在することを示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 3 問

xyz 空間内に点 $A(-2, 0, 2)$ と $B(2, 0, 2)$ がある。また、点 P は xy 平面上の原点を中心とする半径 2 の円の周と内部を自由に動く点とする。

線分 AP の通過する範囲を K 、線分 BP の通過する範囲を L とするとき、 K と L の共通部分の体積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 4 問

n を 3 以上の整数とする。 n 個の箱の中に n 個のボールをそれぞれ独立に無作為に入れる。また, $k = 1, 2, \dots, n$ に対し k 番目の箱が空である事象を A_k とおき, 空箱の個数を X_n とおく。

- (1) $P(A_k)$ を求めよ。
- (2) X_n の期待値 E_n を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E_n$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 5 問

p は 2 および 5 ではない素数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $p - 1$ 個の整数 $10, 2 \cdot 10, 3 \cdot 10, \dots, (p - 1) \cdot 10$ を p で割った余りはどの 2 つも異なることを示せ。
- (2) $10^{p-1} - 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) p に適当な正の整数をかけると各位がすべて 1 である整数 $111 \dots 111$ になることを示せ。
たとえば, $p = 3$ の場合は $p \times 37 = 111$, $p = 7$ の場合は $p \times 15873 = 111111$ である。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)

第 6 問

1 辺の長さが 1 の正方形の周上に異なる 3 点 P, Q, R がある。このとき、線分 PQ, QR, RP の長さの最小値を d とする。

P, Q, R が正方形の周上を自由に動くとき d の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ)