第 3 回受験数学コンクール　第 1 次予選　問題と略解

第 1 次予選は, 参加者の基礎力を見極めるためのものです。同時に, この予選の問題が本選のヒントになるように設定されています。第 1 次予選で使った考え方を理解しておけば, 本選の問題のいくつかが楽になります。

このコンクールは, 各自がもっている「知識力」「思考力」「実行力 (計算力)」の他に, 各自が隠しもっている「裏技」を思う存分披露するものです。すべて答の数値を問うものなので, 解答は問いません。最後の数値をしっかりと出せることを評価していきます。

問題

Stage 1

(注) 以下の問題で, 自然数は 0 を含みません。

(1) n を自然数とする。「1 から n までの自然数からその中の 1 つの自然数を除いたものの和」は n 通りできるが, これらの総和を $S(n)$ とおく。例えば,

$$S(3) = (1+2)+(1+3)+(2+3) = 12$$
$$S(4) = (1+2+3)+(1+2+4)+(1+3+4)+(2+3+4) = 30$$
$$S(5) = (1+2+3+4)+(1+2+3+5)+(1+2+4+5)+(1+3+4+5)+(2+3+4+5) = 60$$

である。このような $S(n)$ に対し, $S(n) > 2023$ を満たす最小の自然数 n は, $\boxed{\quad \mathrm{A} \quad}$ である。

(2) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\right)^{100}$ を展開して整理したときの x^{194} の係数は $\boxed{\quad \mathrm{B} \quad}$ である。

Stage 2

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{n}$ とする。ただし, n は自然数である。このとき,

$$\sum_{k=0}^{n} \sin^2 k\theta > 2023$$

を満たす最小の自然数 n は $\boxed{\quad \mathrm{A} \quad}$ である。

(2) xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 9$ と 2 点 $(2,1)$, $(0,-3)$ を通る直線との交点を P, Q とする。原点 $\mathrm{O}(0,0)$ と P, Q を通る円の面積は, $\boxed{\quad \mathrm{B} \quad}\pi$ である。

Stage 3

(1) n を 3 以上の自然数とする。n を 3 個以下の自然数の和で表す。ただし, 和は 1 個の場合も含む。例えば, $n = 3$ の場合は,

$$3,\ 1+2,\ 1+1+1$$

の 3 通り。

$n = 4$ の場合は,

$$4,\ 1+3,\ 2+2,\ 1+1+2$$

の 4 通り。

$n = 5$ の場合は,

$$5,\ 1+4,\ 2+3,\ 1+1+3,\ 1+2+2$$

の 5 通りである。このような和の表し方の個数を $f(n)$ とおくとき, $f(n) > 2023$ を満たす最小の自然数 n は, $\boxed{\text{A}}$ である。

(2)　3 次関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + ax - a^2$ が極大値と極小値をもち, 極大値を M, 極小値を m とする。

$M - m = 36$ となるような a の値は $\boxed{\text{B}}$ である。

答

Stage 1　A 16　B -1313400

Stage 2　A 4047　B $\dfrac{45}{4}$

Stage 3　A 153　B -5

略解

Stage 1

(1)
$$S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) \times n - \frac{1}{2}n(n+1)$$
$$= \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$$

である。$S(n) > 2023$ は,

$$(n-1)n(n+1) > 4046$$

であり, これを満たす最小の n は,

16　答

(2)
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right)^{100} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{200}$$
と見て, x^{194} の係数を求める。求める係数は,

$$-{}_{200}\mathrm{C}_3 = -1313400$$　答

である。

Stage 2

(1)
$$\sum_{k-0}^{n} \sin^2 k\theta = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - \cos 2k\theta}{2}$$
$$= \frac{1}{2}n$$

であるから, $\dfrac{1}{2}n > 2023$ を満たす最小の自然数 n を求めて,

4047　答

(注) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k}{n}\pi + \alpha\right) = 0$ を利用した。この結果は, 本選 Stage 2 (3) でも利用する。

(2)　円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=2x-3$ に対し,

$$x^2+y^2-9+k(2x-y-3)=0$$

は, この円と直線の 2 交点を通る円または直線を表す。これが原点を通るとき, $k=-3$ であるから,

$$x^2+y^2-9-3(2x-y-3)=0$$

$$x^2+y^2-6x+3y=0$$

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{4}$$

この円の面積を求めると, $\dfrac{45}{4}\pi$ なので,

$$\frac{45}{4}$$

答

Stage 3

(1)　$f(n)$ は, 区別のない n 個のボールを区別のない 3 つの袋に入れる方法 (空袋可) であり, 次のようになる。

$$f(n)=\frac{1}{12}n^2+\frac{1}{2}n+r$$

ただし, r は, n が 6 の倍数のとき $r=1$, n が偶数であるが 3 の倍数でないとき $r=\dfrac{2}{3}$, n が 3 の倍数であるが 偶数ではないとき $r=\dfrac{3}{4}$, それ以外のとき $r=\dfrac{5}{12}$ である。

したがって, $0<r\leqq 1$ である。

まず, $\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{1}{2}n=2023$, すなわち,

$n(n+6)=12\times 2023\ (=24276)$ 付近の n を探すと,

$$152\times 158=24016<24276,\quad 153\times 159=24327>24276$$

となる。ここから, 求める n は,

$$153$$

答

(2)　一般に 3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ が $x=\alpha$ で極大, $x=\beta$ で極小のとき, 極大値と極小値の差は,

$$\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$$

である。ここでは, $f'(x)=x^2-4x+a$ より $(\beta-\alpha)^2=4(4-a)$ であるから,

$$M-m=\frac{1}{6}\cdot 8(4-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

であるので, $M-m=36$ となるのは,

$$\frac{4}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=36$$

$$4-a=9$$

$$\therefore\quad a=-5$$

したがって,

$$-5$$

答

第 3 回受験数学コンクール　第 2 次予選　問題と略解

第 2 次予選は, 深く考えてもらいたい問題を用意しています。Stage 1 では単なる数値を問う問題のようですが, これらが Stage 4 の問題を解決することに役に立つようになっています。

Stage 1 と Stage 5 はそれほど難しくないので, 実質, Stage 2, 3, 4 がしっかり取り組めるかどうかでこの予選を突破できるかどうかが決まります。

問題

$\boxed{\text{Stage 1}}$

以下の問いに答えよ。

(1)　$53^2+4=2813$, $83^2+4=6893$ であるから,

$$\frac{53^2+4}{29}+\frac{83^2+4}{61}=\boxed{\quad \mathrm{A} \quad}$$

である。

(2)　$N=73^2+10$ とおくと, $N=5339$ である。$N-19$ が素数でないことを考え, N を素因数分解すると,

$$N=\boxed{\quad \mathrm{B} \quad}\times\boxed{\quad \mathrm{C} \quad}$$

である。ただし, $\mathrm{B}<\mathrm{C}$ であり, B, C は素数である。

(3)　$97^2+2=9411$, $97^2+4=9413$, $97^2+6=9415$, $97^2+8=9417$, $97^2+10=9419$, $97^2+12=9421$, $97^2+14=9423$ である。この中に, 素数が 3 個あることがわかっている。その中で最大のものは, $\boxed{\quad \mathrm{D} \quad}$ である。

(注) D には 4 桁の整数を入れること。(97^2+r の形では入りません。)

Stage 2

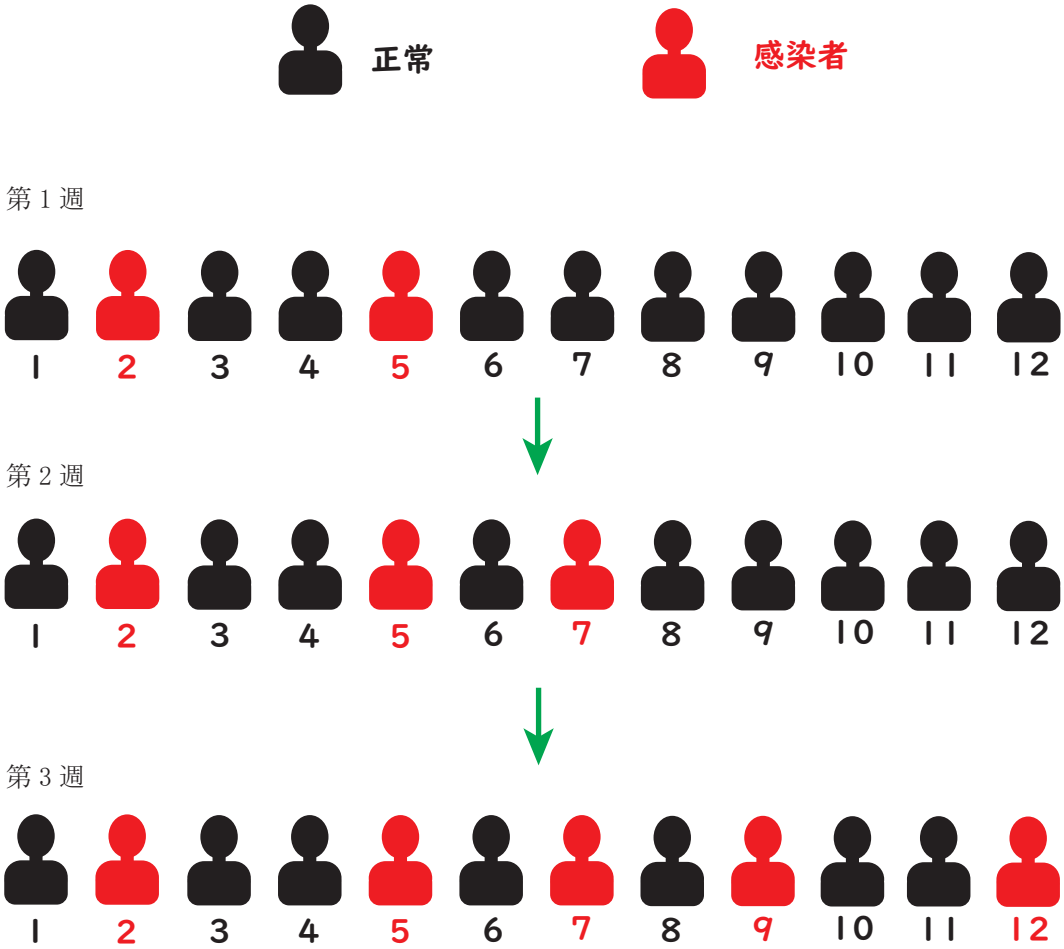
ある都市には, 10 万人の人が住んでおり, 住民には 1 から 10 万までの番号が振られている。

この都市にある伝染病が流行った。この伝染病は一度かかると治ることはなく, 伝染病にかかった 2 人の番号の和の人全員に翌週にうつしてしまうという。

例えば, あるとき「番号 k」「番号 l」$(k < l)$ の人が伝染病にかかっているとすると, 翌週には「番号 $k+l$」の人にうつる。

あるとき, 「番号 2」の人と「番号 5 」の人がこの伝染病にかかった。この週を「第 1 週」とする。

このとき, 次のように感染者が増えていく。



そして, 第 4 週には, 番号が,

2, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21

の人が感染者になる (青字は第 4 週に感染した人)。

第 n 週の感染者の番号で最大のものを M_n とおく。上の例からもわかるように,

$$M_1 = 5, \quad M_2 = 7, \quad M_3 = 12, \quad M_4 = 21$$

である。

(1)　いつまでもこの伝染病にかかることのない人は, $\boxed{\text{A}}$ 人いる。

(2)　確実に伝染病にかかっていない人を知るために, M_n を求めることとした。それは, M_n より大きい番号の人に接触するのは安全だからである。さて, 今, 第 16 週なので, M_{16} を求めると, $M_{16} = \boxed{\text{B}}$ である。

Stage 3

曲線 C を

$$C : \begin{cases} x = 4\sin^2 t \\ y = t\sin 4t \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で定める。すなわち, C は, t が $0 \leqq t \leqq \pi$ をとるときの点 $\mathrm{P}(4\sin^2 t, t\sin 4t)$ の全体である。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cos 2t \, dt = \boxed{\text{A}}$ である。

(2)　C が囲む部分の面積は, $\boxed{\text{B}}\pi$ である。

Stage 4

3 つの素数 p, q, r は次の式を満たす。

$$\frac{p}{q} - \frac{6}{r^2+4} = 1, \qquad r \leqq 100$$

この式を満たす (p, q, r) の組は, 全部で $\boxed{\text{A}}$ 組存在し, そのうち r が最大のものは, $r = \boxed{\text{B}}$ であり, 2 番目に大きいものは $r = \boxed{\text{C}}$ である。

(注) 各 r に対応する p, q は求めなくてもよい。

Stage 5

Stage 1 〜 Stage 4 で集めた 4 枚の「Magic Card」を次の条件を満たすように「適切に」縦に並べよ。

(条件)
4 枚のカードを縦に並べてできる 5×5 の行列 (正方形の数字の並び, 下の例 1, 2 を参照) は, 書かれてある数字の縦, 横, 斜めの和がすべて一致する。ただし, A 〜 G には 1 〜 25 の数字が入り, 埋めた数字と最初から書いてあった数字をあわせた 25 個の数字はどの 2 つも異なる。

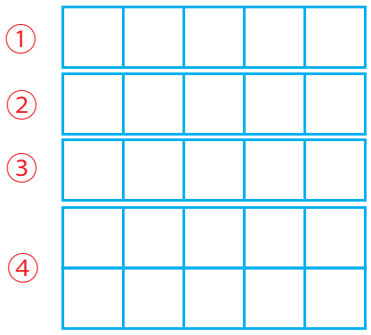
この条件を満たすように適切に並べると,

A = $\boxed{\text{A}}$, B = $\boxed{\text{B}}$, C = $\boxed{\text{C}}$, D = $\boxed{\text{D}}$, E = $\boxed{\text{E}}$, F = $\boxed{\text{F}}$,

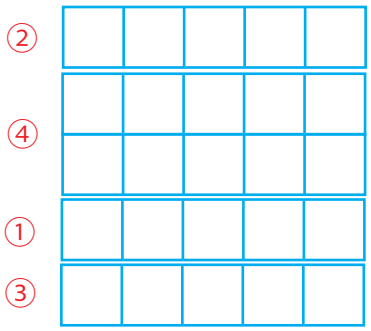
G = | G |

が入る。

例 1



例 2



(解答例)

仮に, A に 1, B に 2, C に 10, D に 13, E に 20, F に 21, G に 24 が入る場合は,

A1B2C10D13E20F21G24

が入ります。1 桁の整数は例えば, 01, 02 のように 2 桁に しないで 入力してください。なお, これは解答例ですので, 実際に C に 10 が入ることはありません。10 は ① の中にあるからです。

(注) Stage 1 ～ Stage 4 で集めた Magic Card は次の通り。

(Magic Card 1)

(Magic Card 2)

(Magic Card 3)

(Magic Card 4)

4

22	20	13	F	G
16	14	7	5	23

答

Stage 1　A 210　B 19　C281　D 9421

Stage 2　A 6　B 78849

Stage 3　A $\frac{1}{6}$　B $\frac{8}{3}$

Stage 4　A 4　B 97　C 13

Stage 5　A 3　B 15　C 1　D 9　E 2　F 6　G 4

略解

Stage 1

問題としては難しくはありません。ここにこの問題を並べた意図 (Stage 4 のヒント) に後で気がつくとよいでしょう。

(1) $\dfrac{53^2+4}{29}+\dfrac{83^2+4}{61}=97+113=210$ 答

(2) $N-19=73^2-9=(73+3)(73-3)=76\cdot 70$ である。したがって, $N-19$ は 19 の倍数であるから, N も 19 の倍数である。$\dfrac{N}{19}=281$ (素数) なので,

$$N=19\times 281$$ 答

である。

(3) 97^2+2, 97^2+8, 97^2+14 は 3 の倍数である。また, $97^2+6=9415$ であり, これは 5 の倍数である。素数が 3 個あることがわかっているので, 残った,

9413, 9419, 9421

が素数なので, D には 9421 が入る。

9421 答

Stage 2

感染者の増えるルールを把握するのが難しいかもしれませんが, 途中から規則性が現れます。

(1) 例えば, 番号 n 以上 $2n$ 以下の人が感染すれば, 次の週には, 少なくとも $2n$ から $3n-1$ までの人が感染し, その次の週には少なくとも $3n$ から $4n$ の人は感染する。すなわち,

「ある週で n 以上 $2n$ 以下の人が感染すれば, その 2 週間後には $2n$ から $4n$ までの人は感染する」

がいえる。以下に示すように, 第 5 週では, 番号 11 から 22 までの人が感染しているので, いずれ番号 11 以上の人はすべて感染する。

よって, 番号 10 以下で感染していない人を考え, 今後, 感染しない人は,

1, 3, 4, 6, 8, 10

の 6 人である。

6 答

(2) 第 5 週は次のようになる。

(2,5,7,9,11,12,13,14,16,17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 40)

そして, 第 6 週の上位 3 つは, 76, 77, 78 であり, これは連続 3 数である。一度, 上位 3 数が連続すると, そのあとはすべて上位 3 数は連続するようになる。
つまり, 第 n 週に最大の番号 a_n に対し, a_n-1, a_n-2 が含まれるようになると, そこから先の週は, 大きい方から 3 番目の数は連続整数になる。

よって, $n \geqq 6$ のとき,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (a_n - 1) \\ &= 2a_n - 1 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 &= 2(a_n - 1) \\ a_n - 1 &= (a_6 - 1)\cdot 2^{n-6} \\ &= 77\cdot 2^{n-6} \qquad (\because a_6 = 78) \\ \therefore \quad a_n &= 77\cdot 2^{n-6} + 1 \end{aligned}$$

したがって, $a_{16} = 77\cdot 2^{10} + 1 = 78849$ である。

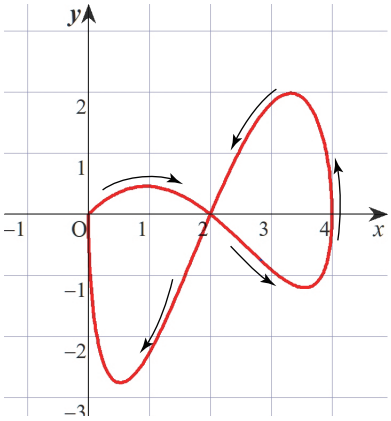
78849 答

Stage 3

面積を求める問題ですが, 軌道がループを描いているので, 曲線の概形を考えずに「最初から最後まで積分」と考えていると正しい数値がでてきません。

(1)
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t \cos 2t\, dt &= \left[\frac{1}{6}\sin^3 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$
答

(2) 曲線の概形は次のようになる。



曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}$ に対応する部分を (x, y_1), $\dfrac{\pi}{4} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分を (x, y_2), $\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ に対応する部分を (x, y_3), $\dfrac{3}{4}\pi \leqq t \leqq \pi$ に対応する部分を (x, y_4) とおく。

求める面積 S は,

$$S = \int_0^2 (y_1 - y_4)\,dx + \int_2^4 (y_3 - y_2)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y_1 \frac{dx}{dt}\,dt - \int_{\pi}^{\frac{3}{4}\pi} y_4 \frac{dx}{dt}\,dt + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{2}} y_3 \frac{dx}{dt}\,dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} y_2 \frac{dx}{dt}\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで, $F(t) = \dfrac{4}{3}t\sin^3 2t + \dfrac{1}{2}\cos 2t - \dfrac{1}{18}\cos 6t$ とおくと, $F'(t) = y\dfrac{dx}{dt}$ であり,

$$F(0) = \frac{4}{9},\ F(\pi) = \frac{4}{9},\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{3},\ F\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\pi$$

であるから, ① より,

$$S = \left(F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)\right) - \left(F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(F\left(\frac{3}{4}\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(F(\pi) - F\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \frac{8}{3}\pi$$

よって,

$$\frac{8}{3}$$

答

Stage 4

早々と, r, r^2+4, r^2+10 がすべて素数であるような r を見つけることがテーマであることに気づくと思いますが, 不要なものを除去していく仕組みを考えていくことがこの問題のテーマです。

与えられた方程式は,

$$(p-q)(r^2+4) = 6q \qquad \cdots\cdots ①$$

となる。p, q は素数だから, $p-q$ が q の倍数になることはないので,

$$(p-q, r^2+4) = (1, 6q),\ (2, 3q,\ (3, 2q),\ (6, q)$$

に限る。

(i)　$r^2+4=6q$ または $2q$ のとき, r^2 は偶数だから, $r=2$ に限るが, どちらの場合も q は素数にならない。

(ii)　$p-q=2$, $r^2+4=3q$ のとき

r^2 は 3 で割ると 2 余るが, そのような整数は存在しない。

(iii)　$p-q=6$, $r^2+4=q$ のとき

$q=r^2+4$, $p=r^2+10$ であるから, r, r^2+4, r^2+10 がすべて素数であるような r $(\geqq 2)$ を見つける。

$r \equiv 0 \pmod 5$ のとき, r^2+10 は 10 より大きい 5 の倍数, $r \equiv \pm 1$ のとき, r^2+4 は 8 より大きい 5 の倍数だから素数にならない。したがって,

$$r \equiv 2,\ 3 \pmod 5$$

に限る。この段階で該当する素数は,

$$r = 2, 3, 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83, 97$$

に絞られる。さらに, $r \equiv \pm 2 \pmod 7$ のときは r^2+10 は 7 の倍数になるから, $r=2, 23, 37, 47$ が抜け, $r \equiv \pm 1 \pmod{11}$ のとき r^2+10 が 11 の倍数になるから, 新たに,

$$r = 43,\ 67$$

が抜けて, $r=3, 7, 13, 17, 53, 73, 83, 97$ が残る。さらに, 53, 73, 83 は Stage 1 から 53^2+4, 73^2+10, 83^2+4 は素数ではないので該当しない。$r=97$ は Stage 1 から 9413 と 9419 は素数であるので条件を満たす。

$r=3, 7, 13$ は, 「r^2+4, r^2+10 は素数」を満たし,

$$(p, q, r) = (19, 13, 3),\ (59, 53, 7),\ (179, 173, 13)$$

である。$r=17$ のとき $r^2+10=299=13\cdot 23$ は素数ではない。

以上より, $r=3, 7, 13, 97$ が満たす。

(p, q, r) は 4 組あり, r が最大のものは 97, 2 番目に大きいものは 13 である。

Stage 5

実は魔法陣は完成させなくても結果は得られます。確実に決まるところから埋めていけばよいのです。

次のように入る。A から G は一意に決まるが, 魔法陣の並べ方は一例にすぎず, 他にもある。

D	E	25	18	11
A	21	19	12	10
22	20	13	F	G
16	14	7	5	23
B	8	C	24	17

$\rightarrow$

9	2	25	18	11
3	21	19	12	10
22	20	13	6	4
16	14	7	5	23
15	8	1	24	17

第 3 回受験数学コンクール　本選　問題と略解

本選は, タイムアタック, すなわち, 解くスピードを競うものです。計算力がある, 独自の裏技をもっている人が有利です。問題は, すべて手で計算することを想定していますので, うまく解く工夫を考えることで速く解けます。

問題

Stage 1

(三男 Z axis からの問題)

5

Z axis (三男)

次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + 7x + 1 = 0$ は複素数の範囲内に異なる 3 個の解 α, β, γ をもつ。
　次に 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d は実数の定数) は, この α, β, γ に対して,

$$f(\alpha) = \beta^2 + \gamma^2 + 108$$
$$f(\beta) = \gamma^2 + \alpha^2 + 108$$
$$f(\gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + 108$$

および, $f(1) = 124$ を満たすという。このとき, $f(10) = \boxed{\quad \mathrm{A} \quad}$ である。

(2)　4 次方程式 $x^4 + 2x^2 - 4x + 4 = 0$ は 4 個の異なる複素数解をもつ。その 4 つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする。このとき,

$$(1 - \alpha^4)(1 - \beta^4)(1 - \gamma^4)(1 - \delta^4)$$

の値は, $\boxed{\quad \mathrm{B} \quad}$ である。

Stage 2

(次男 Y axis からの問題)

4

Y axis (次男)

次の問いに答えよ。

(1)　m を正の整数, x を $0 < x < 90$ を満たす整数とする。m と x は,

$$\cos x^\circ = \frac{\sqrt{m+4} - \sqrt{m}}{4}$$

を満たす。

$m = 2$ のとき, $x =$ $\boxed{\text{A}}$ であり, $m = 1$ のとき $x =$ $\boxed{\text{B}}$ である。

(2)　m を正の整数, x を $0 < x < 90$ を満たす整数とする。m と x は,

$$\cos x^\circ = \frac{\sqrt{m+4} + \sqrt{m}}{4}$$

を満たす。

$m = 2$ のとき, $x =$ $\boxed{\text{C}}$ であり, $m = 1$ のとき $x =$ $\boxed{\text{D}}$ である。

(3)　次のように L を定める。

$$L = \cos 21^\circ + \cos 57^\circ + \cos 93^\circ + \cos 129^\circ + \cos 201^\circ + \cos 237^\circ + \cos 273^\circ + \cos 309^\circ + \cos 345^\circ$$

このとき, $400L$ 以下の最大の整数は, $\boxed{\text{E}}$ である。

Stage 3

(Mrs. Square からの問題)

次の問いに答えよ。

(1)　次の図の曲線 1, 2, 3, 4 は,

アステロイドの一部, 円の一部 (四分円), 直角双曲線の一部, 放物線の一部

である。なお, 曲線 2, 3, 4 は x 軸と y 軸に接している (→ (注)) ものとする。さて, 4 つ曲線がどれにあてはまるかは, 次のようになる。

アステロイドの一部は $\boxed{\text{A}}$ である。

円の一部 (四分円) は $\boxed{\text{B}}$ である。

直角双曲線の一部は $\boxed{\text{C}}$ である。

放物線の一部は $\boxed{\text{D}}$ である。

A, B, C, D を埋めよ。例えば, 4 本の曲線を表す図が順に 1, 2, 3, 4 の場合は,

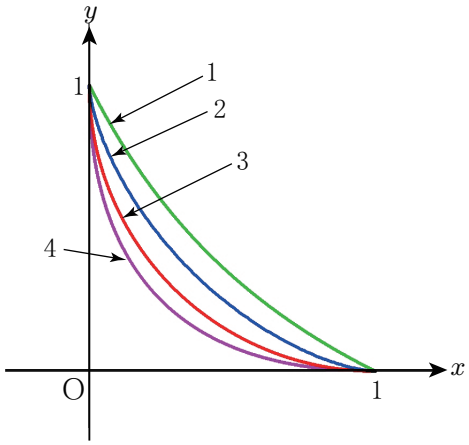
A1B2C3D4

と入力し, 2, 3, 4, 1 の場合は,

A2B3C4D1

を入力せよ。

(注) この問題の場合, 「x 軸に接している」とは, 曲線上の点 P が点 $(1, 0)$ に限りなく近づいたとき, P における曲線の接線が x 軸に限りなく近づく (接線の傾きが 0 に近づく) ことを意味するものとする。「y 軸に接している」も同様に考えることとする。



(2)　次の曲線は,

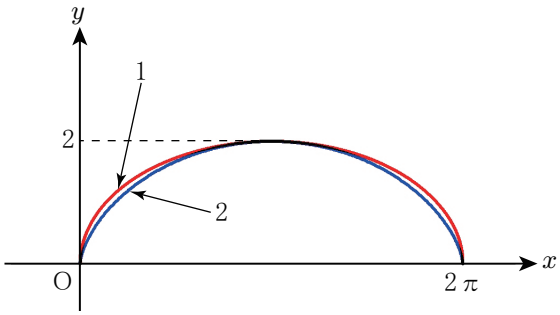
サイクロイド と　楕円の一部

である。これらを表している曲線を曲線に付されている番号で表すと,

サイクロイドは, $\boxed{\text{E}}$

楕円の一部は, $\boxed{\text{F}}$

である。



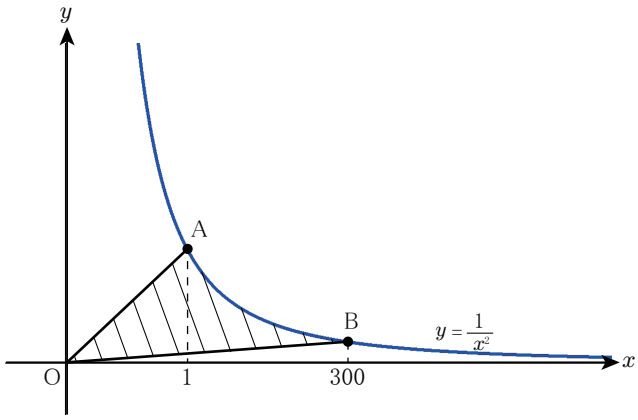
Stage 4

(Mr. Square からの問題)

次の問いに答えよ。

(1)　a, b, c, d は実数とする。3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は, $x = \dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$ のとき極大値 $\dfrac{-7+33\sqrt{33}}{48}$ をとり, $x = \dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$ のとき極小値 $\dfrac{-7-33\sqrt{33}}{48}$ をとるという。このとき, $f(6) = \boxed{\text{A}}$ である。

(2)　xy 平面上の曲線 $C : y = \dfrac{1}{x^2}$ 上に点 $\mathrm{A}(1,1)$ と点 $\mathrm{B}\left(300, \dfrac{1}{90000}\right)$ をとる。原点を $\mathrm{O}(0,0)$ として, 線分 OA, 線分 OB と曲線 C の $1 \leqq x \leqq 300$ の部分で囲まれた部分 (下の図の斜線部) の面積を S とおく。$100S$ の整数部分を求めると $\boxed{\text{B}}$ である。

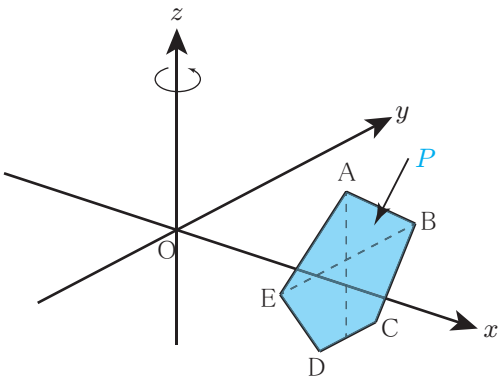


(注) 整数部分とは, 正の数の場合, その数の小数点以下を切り捨てた値である。例えば, 12.34 の整数部分は 12, 56 の整数部分は 56 である。

Stage 5

(Dr. Sci からの問題)

xyz 空間内に 5 点 $\mathrm{A}(2,0,1)$, $\mathrm{B}\left(2,\sin\frac{2}{5}\pi,\cos\frac{2}{5}\pi\right)$, $\mathrm{C}\left(2,\sin\frac{4}{5}\pi,\cos\frac{4}{5}\pi\right)$, $\mathrm{D}\left(2,\sin\frac{6}{5}\pi,\cos\frac{6}{5}\pi\right)$, $\mathrm{E}\left(2,\sin\frac{8}{5}\pi,\cos\frac{8}{5}\pi\right)$ を頂点とする五角形 ABCDE があり, これを P とする。



P を z 軸のまわりに一回転したとき, P の周と内部が通過する部分の体積を V とすると,

$$V=\left(\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}+\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}\sqrt{5}\right)\pi$$

である。

$\boxed{\quad\mathrm{A}\quad}$, $\boxed{\quad\mathrm{B}\quad}$ には有理数が入る。分数式は既約分数の形にして何が入るかを求めよ。

(例)

$V=(2+3\sqrt{5})\pi$ なら　**A2B3**

$V=\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\pi$ なら　**A2/3B4/5**

$V=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)\pi$ なら　**A2/3B-4/5**

を入力せよ。

答

Stage 1　A 2023　B 825

Stage 2　A 75　B 72　C 15　D 36　E 386

Stage 3　A 2　B 3　C 1　D 4　E 2　F 1

Stage 4　A 224　B 149

Stage 5　A $\dfrac{5}{12}$　B $\dfrac{5}{24}$

略解

Stage 1

時を司る三男からの出題ということで, 結果の数値に意味があります。問題の内容は因数定理が中心です。

(1)　解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta+\gamma=4,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=7,\ \alpha\beta\gamma=-1$$

である。ここから,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

を得る. ① より, $\beta^2+\gamma^2=2-\alpha$ であるから, $f(\alpha)=\beta^2+\gamma^2+108$ は,

$$f(\alpha)=(2-\alpha^2)+108$$

$$\therefore\quad f(\alpha)+\alpha^2-110=0$$

同様に, $f(\beta)+\beta^2-110=0,\quad f(\gamma)+\gamma^2-110=0$ が成り立つから, 異なる 3 数 α,β,γ は 3 次方程式

$$f(x)+x^2-110=0$$

の 3 解なので,

$$f(x)+x^2-110=k(x^3-4x^2+7x+1)$$

と表せる。ここで, $f(1)=124$ であるから,

$$124+1-110=5k \qquad \therefore\ k=3$$

したがって,

$$f(x)=3(x^3-4x^2+7x+1)-x^2+110$$

と表せる。よって,

$$f(100)=3(1000-400+70+1)-100+110=2023 \qquad \cdots\cdots (答)$$

である。

(2)　4 次方程式 $x^4+2x^2-4x+4=0$ の 4 つの解が $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ であるから, $f(x)=x^4+2x^2-4x+4$ とおくと,

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\gamma)$$

と表せる。

次に,

$$\begin{aligned} 1-\alpha^4 &= (1-\alpha)(1+\alpha)(1-\alpha i)(1+\alpha i) \\ &= -(1-\alpha)(-1-\alpha)(-i-\alpha)(i-\alpha) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (1-\alpha^4)(1-\beta^4)(1-\gamma^4)(1-\gamma^4) &= f(1)f(-1)f(i)f(-i) \\ &= 3\cdot 11\cdot(3-4i)(3+4i) \\ &= 33\cdot 25 \\ &= 825 \end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (答)

(注) A, B を並べると, 2023825 となり, 本選実施日の 2023 年 8 月 25 日が現れる。

Stage 2

記憶力で答えるか, 実験して考えるかです。この問題の答が, Stage 5 で役に立ちます。

(3) の L は $\cos 165^\circ$ が抜けていることに注意。したがって,

$$L = -\cos 165^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

であるから,

$$400L = 386.3\cdots$$

したがって, 求める最大の整数は 386 である。

Stage 3

絵のセンスをもつ夫人から出題です。普段, 曲線を注意深く眺めているかが大切な問題です。

次の情報から判断する。

(1) アステロイドは $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

円は, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

直角双曲線は, $(x+1)(y+1) = 1$

放物線は, $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$

これらの $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ の部分である。

(2) サイクロイドは, $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

楕円は, $y=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{2\pi x-x^2}$

である。

Stage 4

(1)　高校数学の数学 II の微分で, 3 次関数のグラフを学習しますが, 結局のところ 3 次関数のグラフを極大点と極小点の位置だけで描いていることになります。実は, 3 次関数は, グラフの 2 点の位置で決定しますので, 極大点, 極小点に注目して描くのはそれなりに合理的です。ここでは, 極大点と極小点から元の 3 次関数を復元する問題を出しました。工夫しないと計算が膨れ上がります。
(注) 3 次関数のグラフ上で関数の値が極大, 極小となる点を便宜的に「極大点」「極小点」とここではよんでいます。
(2) よくある設定の問題です。$y=\dfrac{1}{x}$ の問題のように, △OAH と △OBI の面積は等しいと勘違いしなければ正解できます。

(1)　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$ で極値をとるから, $\alpha=\dfrac{-5-\sqrt{33}}{4}$, $\beta=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$ とおくと,

$$f'(x)=3a(x-\alpha)(x-\beta)\qquad(a>0)$$

と表せる。極大値と極小値の差は,

$$\begin{aligned}f(\alpha)-f(\beta)&=-\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx\\&=-3a\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

である。一方, 与えられた条件から, $f(\alpha)-f(\beta)=\dfrac{11\sqrt{33}}{8}$

であるから,

$$\frac{a}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{11\sqrt{33}}{8}$$

$$\frac{a}{2}\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right)^3=\frac{11\sqrt{33}}{8}$$

$$\therefore\quad a=\frac{2}{3}$$

よって,

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-\alpha)(x-\beta)\\&=2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta\\&=2x^2+5x-1\end{aligned}$$

であるから,

$$f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-x+d\qquad(d\text{ は定数})$$

と表せる。

さらに, $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=$ (極値の平均) より,

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{5}{4}\right) &= -\frac{7}{48} \\
\frac{2}{3}\left(-\frac{125}{64}\right)+\frac{5}{2}\cdot\frac{25}{16}-\left(-\frac{5}{4}\right)+d &= -\frac{7}{48} \\
\frac{185}{48}+d &= -\frac{7}{48} \\
\therefore \quad d &= -4
\end{aligned}
$$

したがって, $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-x-4$ であるから,

$$
\begin{aligned}
f(6) &= \frac{2}{3}\cdot 216+\frac{5}{2}\cdot 36-6-4 \\
&= 224
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots$ (答)

(2) $\mathrm{H}(1,0)$, $\mathrm{I}(300,0)$ とすると,

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle\mathrm{OAH}+\int_1^{300}\frac{1}{x^2}\,dx-\triangle\mathrm{OBI} \\
&= \frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{300}-\frac{1}{2}\cdot 300\cdot\frac{1}{300^2} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{300}+1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{300} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{299}{300} \\
&= \frac{299}{200}
\end{aligned}
$$

したがって,

$$100S=\frac{299}{2}=149.5$$

であるから, 求める整数部分は,

149 $\cdots\cdots$ (答)

である。

Stage 5

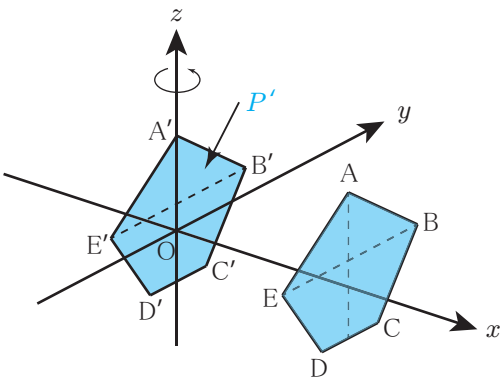
まともに積分に持ち込むと, 大変な計算になりますから, いくつかの場面で工夫が必要です。正五角形 ABCDE を yz 平面に正射影して考えることに気がつけば, そのあとは内容は初等幾何ですが, $\cos\dfrac{2}{5}\pi$ などの値が必要になります。これは, Stage 2 の結果をうまく使うようにしましょう。

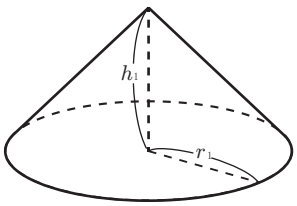
例えば, $\mathrm{F}(k,l,m)$, $\mathrm{G}(k,0,m)$ として, 線分 FG を z 軸の周りに 1 回転したときに通過する部分の面積は,

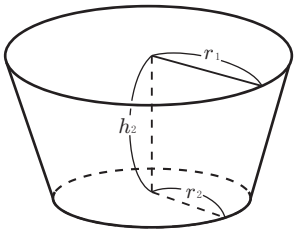
$$\pi(k^2+l^2)-\pi k^2=\pi l^2$$

であり, これは k によらない。したがって, 線分 FG を x 軸方向に平行移動して z 軸のまわりに 1 回転しても通過範囲の面積は変わらない。

この事実から, 五角形 P は yz 平面上になるまで平行移動し (これを P' とする), それを z 軸のまわりに 1 回転しても体積は不変である。







P' の $z \geqq \cos\dfrac{2}{5}\pi$ の部分を z 軸のまわりに 1 回転すると, 半径 $r_1=\sin\dfrac{2}{5}\pi$ の円を底面とし, 高さ $h_1=1-\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の円すいができる。また, $z \leqq \cos\dfrac{2}{5}\pi$ の部分を z 軸のまわりに 1 回転すると, 上底面が半径 r_1 の円, 下底面が半径 $r_2=\sin\dfrac{4}{5}\pi$ の円, 高さが $h_2=\cos\dfrac{2}{5}\pi-\cos\dfrac{4}{5}\pi$ の

円すい台ができる。以下, $\theta = \dfrac{2}{5}\pi$ とし, 円すいの体積を V_1, 円すい台の体積を V_2 とおく。

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi \sin^2\theta(1-\cos\theta) \\
V_2 &= \frac{\pi}{3}h_2(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \qquad (\text{円すい台の体積公式より}) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\cos\theta - \cos 2\theta\right)\left(\sin^2\theta + \sin\theta\sin 2\theta + \sin^2 2\theta\right) \\
&= \frac{\pi}{3}(1+\cos\theta - 2\cos^2\theta)\sin^2\theta(1+2\cos\theta+4\cos^2\theta) \\
&= \frac{\pi}{3}\sin^2\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)(1+2\cos\theta+4\cos^2\theta) \qquad 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0 \text{ より} \\
&= \frac{\pi}{3}\sin^2\theta(1-\cos\theta)\cdot 2(1+2\cos\theta)
\end{aligned}
$$

したがって, 求める体積は,

$$
\begin{aligned}
V_1 + V_2 &= \frac{\pi}{3}\sin^2\theta(1-\cos\theta)\{1+2(1+2\cos\theta)\} \\
&= \frac{\pi}{3}(1-\cos^2\theta)(1-\cos\theta)(4\cos\theta+3) \\
&= \frac{\pi}{3}(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)(4\cos\theta+3) \\
&= \frac{\pi}{3}(1-\cos\theta)^2(4\cos^2\theta+7\cos\theta+3) \\
&= \frac{\pi}{3}(1-\cos\theta)^2(5\cos\theta+4) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4}\right)^2\cdot\frac{11+5\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{15-5\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{11+5\sqrt{5}}{4} \\
&= \frac{5\pi}{96}(3-\sqrt{5})(11+5\sqrt{5}) \\
&= \frac{5\pi}{96}(8+4\sqrt{5}) \\
&= \frac{5\pi}{24}(2+\sqrt{5}) \\
&= \left(\frac{5}{12}+\frac{5}{24}\sqrt{5}\right)\pi \qquad \cdots\cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$