受験数学コンクール 2022　第 1 次予選問題

第 1 群

$\boxed{\text{A}}$ $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{3} k!\right) + 2^{3^2}$ の値を求めよ。

答　522

$\boxed{\text{B}}$ 1000 以下の正の整数で正の約数の個数が素数であるものは何個あるか。なお, 1000 以下の素数は全部で 168 個である。

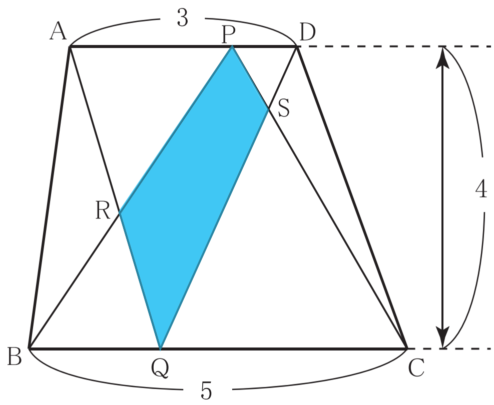
答　184

$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} > \frac{999994}{18000000}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

答　99

第 2 群

$\boxed{\text{A}}$ AD $= 3$, BC $= 5$, BC を底辺と見たときの高さが 4 である図のような台形 ABCD がある。



辺 AD 上に P, 辺 BC 上に Q をとる。ただし, P, Q は辺の端点にある場合を除く。次に, 線分 AQ と BP の交点を R, 線分 CP と DQ の交点を R とする。

P, Q がそれぞれの辺上を動くとき, 四角形 PRQS の面積の最大値を求めよ。

答 $\dfrac{15}{4}$

$\boxed{\text{B}}$ 次の条件を満たす整数の組 (a, b, c) の個数を求めよ。

(i) 任意の正の数 x に対して, $3ax^2 + 2bx + c > 0$ である。

(ii) $-3 \leqq a \leqq 3,\ -3 \leqq b \leqq 3,\ -3 \leqq c \leqq 3$

答 84

第 3 群

$\boxed{\text{A}}$ 次の条件を満たす整数 (x, y, z) の組の個数を求めよ。

(i) $0 \leqq x \leqq y \leqq z \leqq 10$
(ii) $3 \leqq x + y + z \leqq 28$

答 280

$\boxed{\text{B}}$ 次の定積分を求めよ。

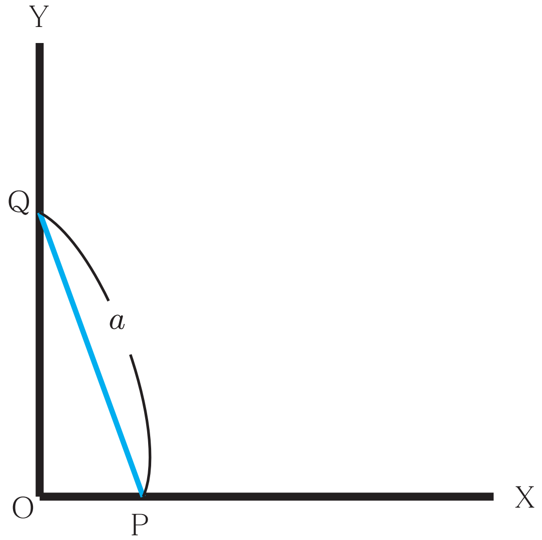
$$\int_{-1+\sqrt{2}}^{3+\sqrt{2}} \{x^2 - (2+2\sqrt{2})x + 2\sqrt{2}\}\,dx$$

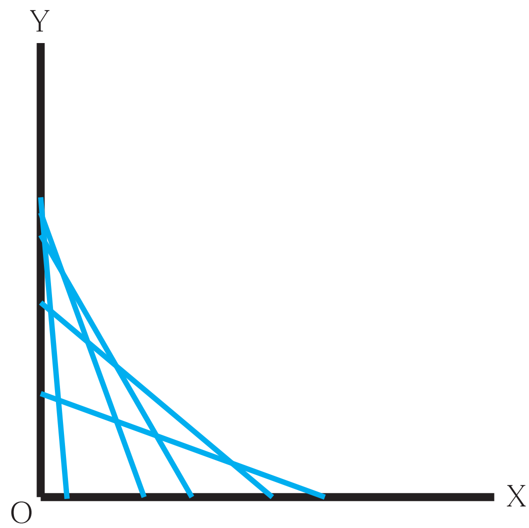
答 $-\dfrac{20}{3}$

受験数学コンクール 2022　第 2 次予選問題

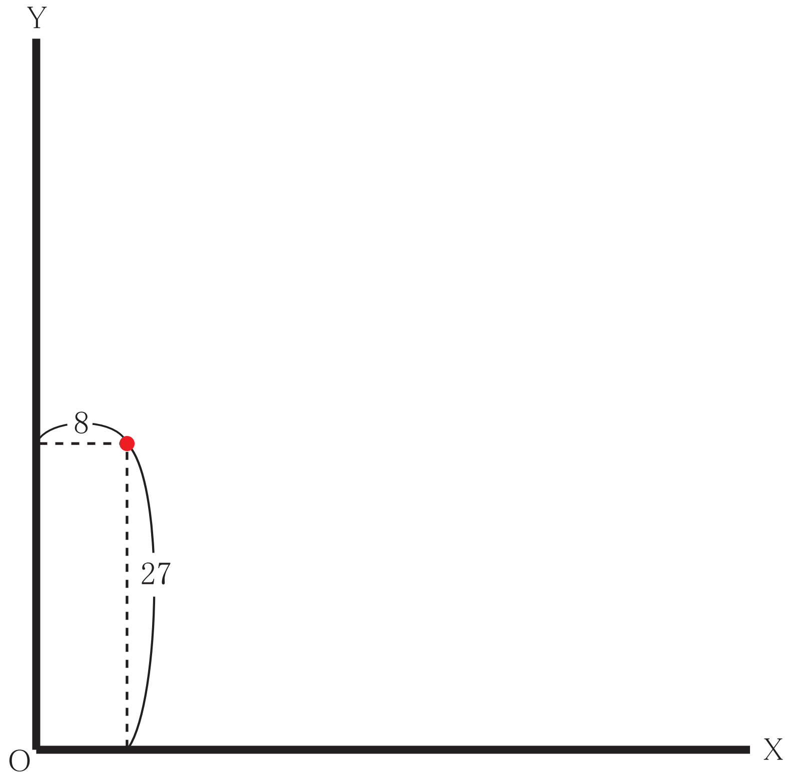
第 1 群

$\boxed{\text{A}}$ 図のように十分に長い線分 OX, OY があり, $\angle\text{XOY} = 90^\circ$ である。
長さ a の線分 PQ が, P が線分 OX 上を, Q が線分 OY にあるように動く。ただし, 線分 PQ は, 「P が O にある状態」から 「Q が O にある状態」まで動く。





さて, 次のページの図のような位置に赤色のポール (図の赤点) が立っている。このとき, 線分 PQ が, P が O にある状態から Q が O にある状態まで移動できるような a の中で最大の整数を求めよ。ただし, ポールの大きさは考えないものとする。



注

条件を満たす a の中で最大の「整数」を答えるので, 仮に $a < 3\sqrt{5}$ が得られた場合は, **6** を入力します。$a < 10$ が得られた場合は **9** を入力します。

答　46

$\boxed{\text{B}}$ xy 平面上に 4 点 $\mathrm{A}(\sqrt{7}, 0)$, $\mathrm{B}(-\sqrt{7}, 0)$, $\mathrm{C}\left(0, \dfrac{2\sqrt{33}}{3}\right)$, $\mathrm{D}\left(0, -\dfrac{2\sqrt{33}}{3}\right)$ がある。

点 P が,

$$\mathrm{AP} + \mathrm{BP} = 4\sqrt{7} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{CP} + \mathrm{DP} = 12$$

を満たすとき, 線分 OP の長さを求め, それを 100 倍した値の整数部分, すなわち, $[\,100\mathrm{OP}\,]$ ($[\ ]$ はガウス記号) を求めよ。

注

仮に $\mathrm{OP} = \sqrt{2}$ の場合は, $\sqrt{2} = \mathbf{1.41}4213\cdots$ より, $100\mathrm{OP} = \mathbf{141}.4213\cdots$ なので **141** を入力します。$\mathrm{OP} = 2$ の場合は, $100\mathrm{OP} = 200$ なので **200** を入力します。

答　500

第 2 群

$\boxed{\text{A}}$ $x > 0,\, y > 0$ のとき，$\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}$ の最小値を求めよ。

答　$\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{B}}$ 5 次方程式 $x^5+x^4+3x^3+2x^2+2x+3=0$ の 5 個の解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ とする。このとき，

$$(1-\alpha^3)(1-\beta^3)(1-\gamma^3)(1-\delta^3)(1-\varepsilon^3)$$

の値を求めよ。

答　108

$\boxed{\text{C}}$ x についての 2 次方程式

$$x^2-2(k+6i)x+2k^2-49+12ki=0$$

が実数解をもつような k の中で最大の整数を求めよ。

答　7

第 3 群

次のように定義される数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ がある。

(i) $a_1=1$

(ii) $n=2^k$ $(k=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ のとき，　$a_n=a_{\frac{n}{2}}+1$

(iii) $n>1$ かつ $n \fallingdotseq 2^k$ $(k=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ のとき，　$a_n=a_{n-1}+1$

また，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする。

$\boxed{\text{A}}$ $a_n > 100$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

答　221

$\boxed{\text{B}}$ $S_n > 10000$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

答　235

受験数学コンクール 2022　本選問題

第 1 群

$\boxed{\text{A}}$ 次の和を求めよ。

$$1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+\frac{243}{32}+\frac{729}{64}+\frac{2187}{128}$$

答　$\dfrac{6305}{128}$

$\boxed{\text{B}}$ 次の和を求めよ。

$$1^2+3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2+15^2+19^2+21^2+23^2+25^2+27^2+29^2+31^2$$

答　5167

$\boxed{\text{C}}$ 実数 x, y, z, w が, $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ を満たすとき, $xy+xz+xw+yz+yw+zw$ の取り得る最小値を求めよ。

答　$-\dfrac{1}{2}$

第 2 群

$6!=720$, $10!=3628800$, $20!=2432902008176640000$ のように $n!$ (n は自然数) は n が大きくなると末尾に 0 が多く並ぶようになる。

$A=1000!$ とおく。A も 10 進表記すると末尾に 0 が並ぶが, その並んだ個数を s とおく。

$\boxed{\text{A}}$ s を求めよ。

答　249

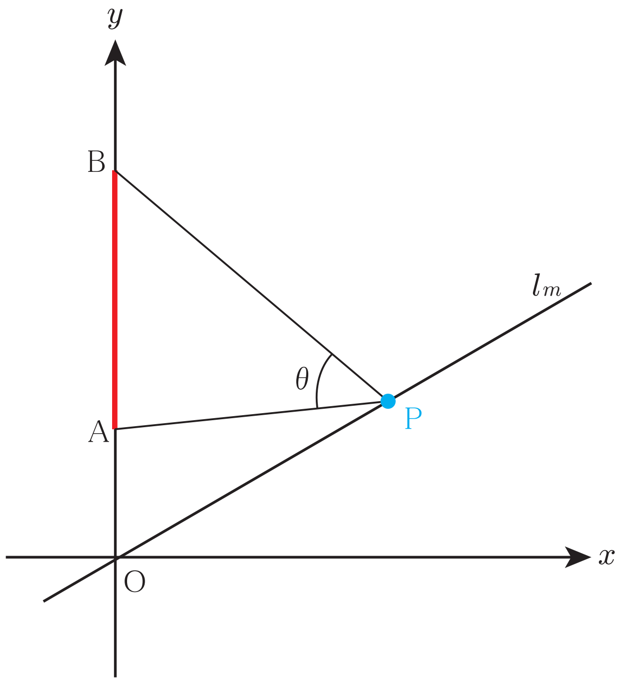
$\boxed{\text{B}}$ A の 10^s の位の数字 (右から $s+1$ 番目の数) を求めよ。

答　2

第 3 群

xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,3)$ がある。

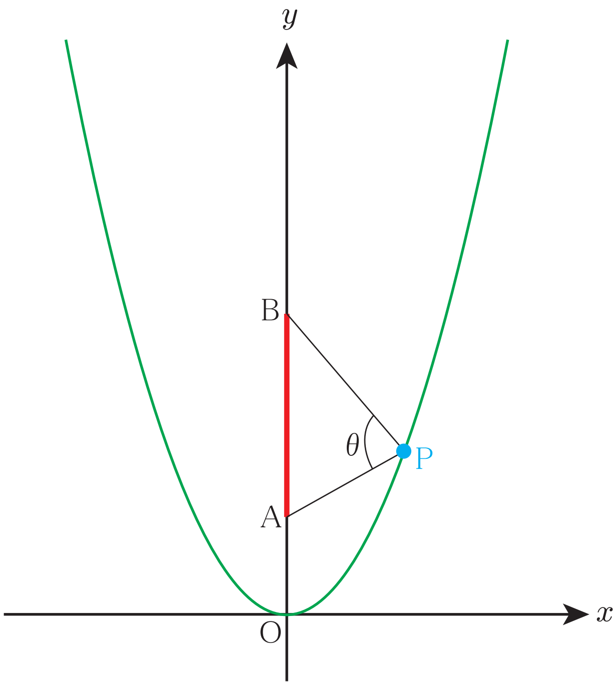
$\boxed{\mathrm{A}}$ m を正の実数とする。原点を通り, 傾き $\sqrt{m}$ の直線を l_m とする。$\mathrm{P}(p,q)$ $(p>0)$ を l_m 上の点とし, $\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおく。P が l_m 上の $x>0$ の部分を動くとき, θ を最大にする P を T とおく。



T が直線 $x=1$ 上にあるとき, m の値を求めよ。

答　2

$\boxed{\text{B}}$　曲線 $y = x^2$ 上を動く点 P がある。



$\theta = \angle\text{APB}$ とおくとき, θ を最大にする点 P の y 座標を M とおく。このとき, $100M$ の整数部分を答えよ。

注

$M = 4$ の場合は, $100M = 400$ なので, **400** を入力する。また, $M = 2 + \sqrt{3}$ のときは, $M = 3.73205\cdots$ なので, **373** を入力する。

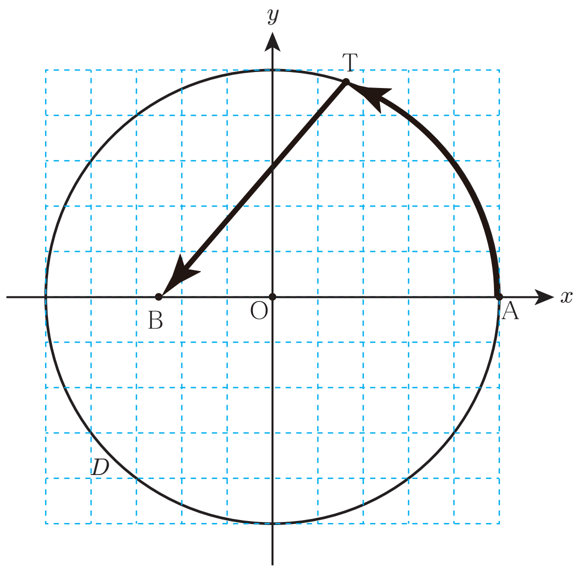
答　161

第 4 群

図のように xy 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円 D がある。点 P は, 円 D の内部を速さ v で移動し, D の周を速さ kv $(k>1)$ で移動する。

点 P が D の周上の点 A$(1,0)$ から D の周に沿って反時計回りに移動し, D 上の周上の点 T$(\cos\theta, \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ から D の内部の点 B まで向きを変えずに進む。ただし, A, O, B のこの順に一直線上に並び, $\mathrm{OB} = \dfrac{1}{2}$ であるとする。

以下, A から T まで移動し, B に達するまでの時間を所要時間とよぶこととする。



$\boxed{\mathrm{A}}$ $k=2$ のとき, 所要時間が最小になるような T$(\cos\theta, \sin\theta)$ を求め, そのときの θ を答えよ。

答　0

$\boxed{\mathrm{B}}$ $k=4$ のとき, 所要時間を最小にする T の座標を (X, Y) とおく。$1000X$ 以下の最大の整数 ($[1000X]$) を求めよ。

注

$X = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ の場合は, $\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0.433012\cdots$ なので, **433** を入力します。$X = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ の場合は, $X = -0.433012\cdots$ なので, $-$**434** を入力します。

答　-964