幸せ物語 2011

第 3 話　じゃんけんの回数

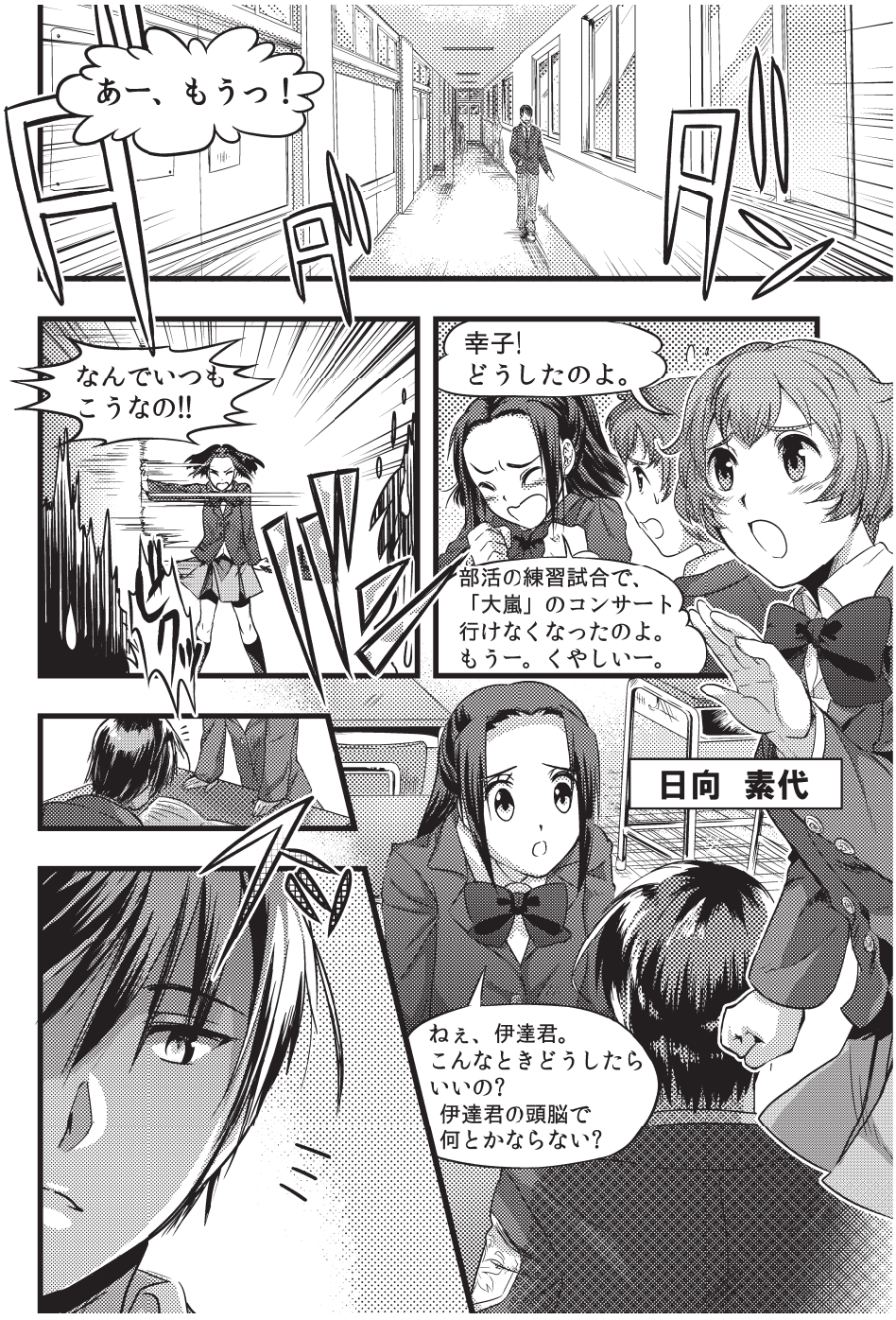
****

受験数学の中には, 実際の生活に役立つ部分も多くあります。その中の一つが期待値でしょう。今回は, そんな期待値の話を紹介しましょう。

****

昼休みがもうすぐ終わるというときに, 幸子さんは部活の顧問の先生に呼ばれて職員室に行きました。何やら緊急の用のようです。その他の生徒は教室に戻ってきて, 次の授業の準備を始めています。

このとき, 教室に「嵐」が起きました。


あー、もうっ！
ドドドン
ドドドン
なんでいつも
こうなの!!
ドドドン
幸子!
どうしたのよ。
部活の練習試合で、
「大嵐」のコンサート
行けなくなったのよ。
もうー。くやしいー。
日向　素代
ねぇ、伊達君。
こんなときどうしたら
いいの?
伊達君の頭脳で
何とかならない?

えー？
そもそも、
「大嵐」ってなに？
伊達君「大嵐」も
知らないの？
ジョニーズの5人組の
アイドルグループよ。
大井君、桜葉君、相宮君、
二本君、松野君からなる
今、チョー人気のグループなの。
MATUNO
NIHON
AIMIYA
OOI
SAKURABA
へぇー。
「へぇー」って言うけどね、
「大嵐」のチケットってなかなか
手に入らないのよ。
ファンクラブに入っていたって
難しいんだから。
ねぇ、幸子。
私ちょっと
気になることがあるんだけど、
ということはね。
そのなかなか手に入らない
チケット誰が使うの？

誰って、そんなのさっき行けないと決まったんだから、まだ、決まっていないわよ。
ということは、
今、そのチケットは余っているのね。
なるほど!!!
ハッ
ハッ
ハッ

私だって、 最初から
チケットどうなるのかなー
と思っていたわ。
水川 有理恵
私だってそうよ。
そんなプラチナチケット
余っているなんて気がつかない
方がおかしいわ。
土橋 四元子
そうそう。
チケットは無駄にしては
いけないよな。
月里 自朗
もうー。誰も私をかわいそうだと
思ってくれないね。
いいわ、どうせ私行けないんだし、
誰かにあげるわ。
あのですね。
皆さん喜んでいますけど、
余っているチケットは
1枚しかないのよ。
みんなでは行けないのよ。
そうか、それじゃ、
公平にじゃんけんで決めよう。
最初は 6 人でやって、負けた人は
抜けていく。
それで、最後に一人勝った人を決める。
これでどう?

いいわ。
幸弥!
でも、もう昼休み時間ないよ。
あと1分でチャイムが
なるんじゃないかな。
えー。
今、決めなきゃいやだわ。
落ち着かなくて授業が身に入らない!!
でも、6人でじゃんけん
したらなかなか
終わらないんじゃないの?
そう言っている時間が
もったいないのよ。
今、やればいいよ。
6人で勝ち残りのじゃんけんを
した場合、平均すると約 6.22回で
決着するから。
1回のじゃんけんで3秒
かかったとしても間に合うよ。
もっと長く
かかりそうな気がするけど、
伊達君が言うから今やろう。
さーて。
じゃんけん
ポーン!
おわった…。
へぇー。本当に終わるんだ。
でもなんでなんだろう。

★ ★

幸子さんがそう思ったところで授業開始のチャイムがなりました。幸子さんは, コンサートに行けなくなったことを忘れ, なんで伊達君の言う通り 6 回前後で終わったのかが気になっていました。

★ ★

放課後になりました。幸子さんは, 思わず帰りかけの伊達君に詰め寄りました。

幸子: ねぇ, 伊達君。昼休みのことだけど, なんで 6 人でじゃんけんをすると平均 6.22 回で終わるとわかったの?

伊達: あ, さっきのことだね。期待値さ。以前計算したことがあるんだ。

幸子: 期待値?

伊達: そうさ。6 人でじゃんけんをすれば平均何回で終わるのかという計算をすることになるんだよ。

幸子: 期待値だとすれば, 6 人でじゃんけんをしたときに勝者が決まる回数を X, $X = k$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ となる確率を p_k とおくと,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kp_k$$

となるっていうやつよね。

伊達: それ自体は間違っているわけではないけど, その方法だと計算が大変なんだ。

幸子: じゃあどうするの?

伊達: いろいろと準備が必要なんだ。まず, n 人がじゃんけんをして m 人が勝ち残る確率は,

$${}_n\mathrm{C}_m \cdot 3\left(\frac{1}{3}\right)^n = {}_n\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

なんだ。ただし, m は n より小さい自然数で n は 2 以上の整数だよ。

[それを聞いていた幸弥君と日向さんも参加してきました。]

日向: ええと, その式の 「${}_n\mathrm{C}_m$」 は n から勝者になる m 人を選ぶ場合の数で, 「3」は何で勝つかで $\cdots$

伊達: そう。だれが何で勝つかが決まると全員出すものが確定するから, n 人が自分が決められたものを出す確率が $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ なんだよ。

幸弥: そうか。

伊達: なお, あいこになる確率は「残り」の確率を求めるとよいから,

$$\begin{aligned}1-\sum_{m=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\sum_{m=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_m\\ &= 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\{(1+1)^n-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n\}\\ &= 1-(2^n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

となるんだ。

幸弥: $\displaystyle\sum_{m=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_m$ は何で $\{(1+1)^n-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n\}$ になるの?

伊達: 二項定理だよ。$\displaystyle\sum_{m=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_m$ なら (Σ の範囲が違うから注意してね),

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_m &= \sum_{m=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_m\cdot 1^m\cdot 1^{n-m}\\ &= (1+1)^n\end{aligned}$$

となるので, そこから余計な ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_n$ を引くんだ。

幸子: あれ? 幸弥, 固まっていない?

日向: 福原君 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^k b^{n-k}=(a+b)^n$ は大丈夫よね。

幸弥: う, うん。まあ $\cdots$

伊達: それで, このあと使うから, ある程度の範囲で n 人じゃんけんをして m 人が勝ち残る確率と引き分けになる確率を記しておくと次のようになるんだ。

n \ m	1	2	3	4	5	6	引き分け
2	$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$					$\frac{1}{3}$
4	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{4}{27}$				$\frac{13}{27}$
5	$\frac{5}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{5}{81}$			$\frac{17}{27}$
6	$\frac{6}{243}$	$\frac{15}{243}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{15}{243}$	$\frac{6}{243}$		$\frac{181}{243}$
7	$\frac{7}{729}$	$\frac{21}{729}$	$\frac{35}{729}$	$\frac{35}{729}$	$\frac{21}{729}$	$\frac{7}{729}$	$\frac{67}{81}$

伊達: それから, $-1 < r < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ となることは説明の必要がないとして, これを使って, 次の公式も使うことになるよ。

> $-1 < r < 1$ のとき,
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$
>
> が成り立つ。

幸子: え, ええと。まあ, 成り立つのね。

伊達: では, 本題に入るけど, n ($\geqq 2$) 人でじゃんけんをしたとき, 勝者が一人に決まるまでじゃんけんを行う回数の期待値を E_n とおくと,

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{3}{2} \quad (= 1.5) \end{aligned}$$

となる。

日向: ええと, k 回目に初めて勝者が一人に決定するには, $k-1$ 回あいこが続き, 最後にどちらかが勝つ場合だから, あいこの確率 $\dfrac{1}{3}$ を $k-1$ 回かけて, それに $\dfrac{2}{3}$ をかければよいのね。

伊達: そうだよ。この結果から 2 人でじゃんけんをするときは平均すると 1.5 回で決着するというわけ。

幸弥: なるほど。

伊達: 続いて, E_3 についてだけど,

$$E_3 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}(1+E_2) + \frac{1}{3}(1+E_3) \qquad \cdots\cdots (3.1)$$

なので, $\cdots$

幸弥: うーん。よくわからなくなってきた。

伊達: あっ, そうか。ちょっと難しいことを使ったからね。福原君, 例えば次のような問題わかる?

【例題 3 – 1 】

2 つの箱 A, B があり, A の箱には 1, 2, 3, 4, 5 が書かれた球が 1 個ずつ入っていて, B の箱には 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 が書かれた球が 1 個ずつ入っている。まずさいころを 1 回投げて,

- 1, 2, 3, 4 の目が出れば A から 1 個球を取り出す
- 5, 6 の目が出れば B から 1 個球を取り出す

このとき, 取り出す球の期待値を求めよ。

伊達: この問題は, もちろん球 k $(1 \leqq k \leqq 7)$ を取り出す確率を p_k とおいて,

$$\sum_{k=1}^{7} kp_k$$

を求めても結果は得られるけど $\cdots$

幸子: その方法ならわかるわ。p_k は,

$k=1,2$ のとき　$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{15}$

$k=3,4,5$ のとき　$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{19}{105}$

$k=6,7,8,9$ のとき　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{21}$

だから, あとは計算するだけよね。

伊達: そう。だけど, こんな考え方でもできるんだ。

日向: どんな?

伊達: まず, A の箱を選ぶ確率はいくつ?

幸弥: そんなの $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ だよね。

伊達: 次に A の箱から 1 個球を選びたすとき, 取りだした球に書かれている数字の期待値は何?

幸子: それは,

$$1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot\frac{1}{5}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$$

伊達: では, B の箱を選ぶ確率と B から取り出した球に書かれている数字の期待値は?

幸子: 箱を選ぶ確率が $\dfrac{1}{3}$ で期待値は,

$$\frac{3+4+5+6+7+8+9}{7}=6$$

よね。

伊達: そう。それでこの問題の求める期待値は,

$$\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{3}\cdot 6=4$$

として求めることができるんだ。

幸弥: ??

伊達: つまりさ, 簡単に書くと

(箱 A を選ぶ確率)× (A の期待値)+(箱 B を選ぶ確率)× (B の期待値)

となる。簡単に 「A の期待値」って書いちゃったけど, これは A から球を 1 個選んだとき, 球に書かれている数字の期待値だからね。

日向: ということは, (確率) × (期待値) + (確率) × (期待値) で期待値を計算しているのね。

伊達: それで, さきほどの (3.1) に話を戻すよ。

3 人がじゃんけんをするとき, 確率 $\frac{1}{3}$ で 1 人の勝者が決まる。このときはじゃんけんをした回数は 1 回だから, $\frac{1}{3} \cdot 1$ として, これが (3.1) の第 1 項。

次に, 確率 $\frac{1}{3}$ で 2 人の勝者が決まるわけだけど, このとき,

- すでに 1 回じゃんけんをした
- 今後勝者が決まるまで E_2 回のじゃんけんを行うことが期待される

ということで, この場合じゃんけんをする回数の平均値 (期待値) は $(1 + E_2)$ になるというわけ。

幸弥: ふぅーん。

伊達: そして, 確率 $\frac{1}{3}$ であいこになった場合も同じ。

それで, (3.1) が得られるわけ。

幸子: あれ, (3.1) は E_3 を E_3 を用いて表しているのね。

伊達: そうだよ。E_3 は左辺に移項するんだよ。まず, (3.1) に $E_2 = \frac{3}{2}$ を代入すると,

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3}(1 + E_3) \\
\frac{2}{3}E_3 &= \frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{3}{2} \\
E_3 &= \frac{9}{4} \quad (= 2.25)
\end{aligned}
$$

日向: つまり, 3 人でじゃんけんをすると勝者が決まるまで平均すると 2.25 回かかるのね。へぇー, 3 回かからないんだ。

幸子: 伊達君, じゃあ n 人でじゃんけんをするとき勝者が決まるまでじゃんけんをする回数はいつも n 回かからないの?

伊達: そうはいかないんだ。その前に続きを同様にして計算してみるよ。

$$E_4 = \frac{4}{27} \cdot 1 + \frac{6}{27}(1 + E_2) + \frac{4}{27}(1 + E_3) + \frac{13}{27}(1 + E_4)$$

より, E_4 を求めて,

$$E_4 = \frac{45}{14} \quad (= 3.21 \cdots)$$

$$E_5 = \frac{5}{81} \cdot 1 + \frac{10}{81}(1 + E_2) + \frac{10}{81}(1 + E_3) + \frac{5}{81}(1 + E_4) + \frac{17}{81}(1 + E_5)$$

より,

$$E_5 = \frac{157}{35} \quad (= 4.48 \cdots)$$

日向: だんだん計算の量が増えてくるのね。

伊達: そうだよ。もう少し計算を回避する方法はあるけどね。それはね, ちょっと難しいんだけど, n 人でじゃんけんを始めてから初めて n 人より少ない勝者になる回数の期待値をまず出すんだ。

日向: つまり, n 人が引き分けでなくなる回数の期待値ね。

伊達: うん。それは, $n = 5$ なら,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{17}{27}\right)^{k-1} \cdot \frac{10}{27} &= \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{17}{27}\right)^2} \\ &= \frac{27}{10}\end{aligned}$$

日向: あ, これ, さっきの無限級数の公式ね。

伊達: そうだよ。つまり平均すると $\frac{27}{10}$ 回後に「均衡」が破れる。そのとき, n 人から何人になるかは n 人から m 人に変動する確率である,

$$\frac{5}{81}, \frac{10}{81}, \frac{10}{81}, \frac{5}{81}$$

の比で決まるんだ。つまり,

$$\frac{5}{81} : \frac{10}{81} : \frac{10}{81} : \frac{5}{81} = 1 : 2 : 2 : 1$$

だから, $1 : 2 : 2 : 1$ で勝者が 1 人, 2 人, 3 人, 4 人だけ残るというわけ。そして, 均衡が破れてから決着がつくまでの回数は順に 0 回, E_2 回, E_3 回, E_4 回であるから, 平均すると

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{6} E_2 + \frac{2}{6} E_3 + \frac{1}{6} E_4$$

回で終わると考えられるんだ。こうすると E_5 は,

$$\begin{aligned} E_5 &= \frac{27}{10} + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{2}{6}\cdot\frac{3}{2} + \frac{2}{6}\cdot\frac{9}{4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{45}{14} \\ &= \frac{157}{35} \end{aligned}$$

このように求めることもできるんだよ。

日向: 確かに, さっきよりは計算がちょっとだけ楽になったような気もするけど。

伊達: そうだね。筆算で計算する場合は, E_6, E_7 くらいが限界かなあ。ちなみに僕が求めたものは,

$$E_6 = \frac{13497}{2170}, \quad E_7 = \frac{225161}{26040}$$

で, これまでのを小数第 2 位まで求めた (第 3 位を四捨五入した) ものは次のようになるんだよ。

n	1	2	3	4	5	6	7
E_n	0	1.5	2.25	3.21	4.49	6.22	8.65

E_1 については定義していなかったけど, 一人ならじゃんけんをする必要がないので $E_1 = 0$ としておいたけどね。

幸子: これを知っておけば, どの位の回数でじゃんけんをして 1 人の勝者が決まるかがわかるということね。

伊達: そうだよ。ちなみに $\dfrac{E_n}{n}$ の値 (人数に対するじゃんけんで決まるまで回数の比) は単調に増加していって, $n = 6$ のときまず E_n は n を越えるよね。

日向: 伊達君, この表にない部分はどうなるの?

伊達: 10 人, 20 人になると筆算では苦しいのでプログラムを組んでやらないと大変なんだ。ただね, 一つの目安として, 先ほどの均衡が崩れるまでの回数 F_n を知っておくとよいかもしれない。

幸子: 「均衡」って n 人の状態のままでいることよね。そうか。均衡が崩れて, そしてそこから何人かにじゃんけんをする人が減ってさらに残った人でじゃんけんをするから $E_n \geqq F_n$ だしね。

伊達: うん。実は話が長くなるから理由は今は言わないけど、 $F_n \leqq E_n < 2F_n$ が成り立つことも発見したので F_n がわかれば E_n のある程度の範囲もわかるんだ。

幸弥: 伊達君, それで F_n はすぐにわかるの?

伊達: F_n の計算は E_n に比べると比較的簡単だよ。

まず, n 人でじゃんけんをして「均衡」でいられる確率は, 1 回あたり,

$$r_n = 1 - (2^n - 2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

だったから, 始めて均衡が破れる回数 F_n は,

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{k=1}^{\infty} k(r_n)^{k-1}(1-r_n) = (1-r_n)\frac{1}{(1-r_n)^2} \\ &= \frac{1}{1-r_n} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2^n-2} \end{aligned}$$

なんだよ。

幸弥: ふぅーん。

伊達: この数値の見方はね, n がある程度大きくなると $2^n - 2 \quad 2^n$ のように近似することで,

$$F_n \quad \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

となるから $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ のスピードで「指数関数的」に増加していくんだ。だから, じゃんけんをする人の人数が倍になったからといって, 決着がつくまでの回数も倍になるというわけではないんだよ。実際, F_n の値をいくつか紹介すると,

$$F_{10} = \frac{3^9}{2^{10}-2} = 19.259\cdots$$

$$F_{40} = \frac{3^{39}}{2^{40}-2} = 3685777.44\cdots$$

となるから, 10 人でじゃんけんをする場合は, 10 人の均衡が破れるまでに約 20 回を必要とし, このクラス全員でじゃんけんをして 1 人だけ勝者を決めるとなれば, 均衡がやぶれるまでおよそ 370 万回のじゃんけんを必要とすることになるんだ。そこから, 勝ち残った人で決勝戦をすることになるんだね。

幸子: これを知ってしまうと, じゃんけんで勝者を一人決めるのは, せいぜい 7, 8 人が限界なのかな。

伊達: 人数が多いときは, 「予選」をすればいいんだけどね。36 人なら 6 人グルー

プを 6 個作り, そこで 1 位の人を決め, そのあとで 1 位の人を集めて決勝を行えばいいんだ。10 人を越えたら予選をする方がいいよ。

幸子: なんだか, 久々に数学が楽しかったわ。伊達君どうもありがとう。

★　　★

こう言って, 幸弥君, 幸子さんは教室を出て帰路につきました。日向さんは, もう少し伊達君に他の数学の話を聞いていたようです。

★　　★

幸子: ねえ, 幸弥。伊達君って太成君とはちょっと違うよね。

幸弥: え? どこが?

幸子: だって, 太成君は確かに数学はできるのかもしれないけど, 受験のこと以外はあまり知らないみたいだし。それに対して, 伊達君は好きでいろいろと研究しているみたいだし。

幸弥: 人, それぞれという感じかな。

幸子: そう言ってしまえばそれまでだけど · · ·
何か, 勉強って何なんだろうと今日思った。

幸弥: 僕は, そんなこと以前に証先生に「幸せな人」って言われなくなることが先だな。

幸子: そういえば, 結局私の大嵐のチケットだれがもらうことになったんだろう。昼休みはショックでそれどころじゃなかったから全然気がつかなかった。

幸弥: あ, それさ, 日向さんのものになったよ。

幸子: 素代って, いつも運が強いのよね。見習いたい。

幸弥: それじゃあ僕はここで。

幸子: じゃあね。

★　　★

二人はコンビニのポーソンのところで別れて別々の帰路につきました。

幸せ物語 2011 第 3 話　おわり　(絵 ・ 月邸　沙夜)