幸せ物語 2011
第 5 話　6 万年の夢

****

　数学は, ときには私達の生活の大きな武器になります。特に, 何度も繰り返す作業を行なう場合は, 期待値を知っておくことが戦略をたてる上でも重要です。

****

　放課後, 駅の近くで何かの紙を見てにやついている幸弥君を幸子さんが見つけました。幸子さんは幸弥君に近づいても幸弥君は気がつかないようです。
　幸子さんは声をかけました。

★　　★

幸子: ゆ・き・や!

　　[幸弥君は驚いて]

幸弥: わ! びっくりした。脅かさないでくれよ。

幸子: さっきから, 何見てるの? ずっとにやにやしているじゃない。

幸弥: あっ, これのこと? これロト 6 だよ。

幸子: え? それって確かくじ引きみたいなものよね。

幸弥: まあね。簡単に言うと 01 〜 43 のうちから異なる 6 個の数字を選んで書く。そして, その 6 個の数字が発表された 6 個の数字と全部一致したら「1 等」と言って, 平均すると 1 億円くらいもらえるらしい。

　　[幸子さんは, いつになく明るい幸弥君にちょっとあきれた様子です。]

幸子: あのさ, 私たち高校生よ。宝くじなんて買ってもいいの?

幸弥: もちろん, 合法さ! 太成君が言っていた。それから「宝くじ」じゃなくて「ロト 6 」だよ。

幸子: あ〜。ピンと来た! これって太成君の影響ね。

　　[幸弥君はちょっと動揺した様子です。]

幸弥: あ, ああ。まあ, そうともいえる。でも, そんなことどうでもいいよね。ね。

幸子: やっぱり〜。太成君に騙されていない?

幸弥: そんなことはない。僕なりの作戦があるんだ。

幸子: え? 何? それ。私にも教えてくれる?

幸弥: いいよ。じゃあ, あそこに入ろうか。

★　　★

そういうと, 幸弥君は駅の改札の正面にあるファミレスを指差し, 2 人はその中に入りました。

ファミレスの中で 2 人が座ると, 隣には第 1 話のときにもファミレスにいた大学生の中島君が一人で座っていました。中島君は待ち合わせをしている様子で, 今は暇そうな感じでした。

幸弥君と幸子さんは先ほどの話の続きを始めました。

★　　★

幸子: それで, 「作戦」っていったいなんなの?

幸弥: それはさ, まだ一度も 6 個の数字で

$\boxed{01}\ \boxed{02}\ \boxed{03}\ \boxed{04}\ \boxed{05}\ \boxed{06}$

という連番の組合せは出ていないんだ。

幸子: だから?

幸弥: これだから幸子は鈍いなあ!

[幸子さんは少しムッとしました。]

幸子: もったいぶらないで教えてよ。

幸弥: まだ, この組合せが出ていないということは, いつかは出るということじゃないか! だから, この組合せをこつこつ買っていればいつかは当たるということさ!

幸子: そうかしら。

[そのとき, 隣の席で大きな笑い声がしました。]

中島: ははははーー。あまーい。あますぎる。あますぎらー! あますぎれすと!!

[幸弥君と幸子さんは驚いて]

幸子: な, なんですか?

中島: ははは。あまりにもあまい考えなので, あますぎるとあますぎるの比較級「あますぎらー」とあますぎるの最上級「あますぎれすと」が出てしまったわけさ。

幸子: 幸弥, 何かこの人きもい。

中島: あれ? 知らないの? 俺の言っている塾で数年前からはやっているんだよ。

幸弥: その比較級と最上級のことですか?

中島: そうさ。

幸弥: へー。塾の先生なんですか。どこの塾ですか?

[中島君はよくぞ聞いてくれたと言わんばかりの態度で言いました。]

中島: SSH さ。つまり, 渋谷進学ハイスクールってこと。進学成績ばっちりのやつさ。君たち, 幸福高校の生徒だろ。幸福高校からも何人か来ているよ。

幸子: あ, その塾聞いたことある。

中島: 塾の先生の他にも家庭教師もしているけどね。まあ, あちこちから誘われて大変なんだよな。

幸子: (小声で) 幸弥, この人と太成君のどっちがナル様 (ナルシスト) かね。

中島: ん? 何か言った。

幸子: あ, い, いや, あ, そうだ。さっきの笑いは何だったんですか?

中島: だって, そっちの男の子君の言っていることが面白すぎるからなー。

幸弥: え? どこがですか?

中島: じゃあ, 説明しよう。

1 回あたり確率 p $(0 < p < 1)$ で当たるくじがある。くじが当たるかはずれるかは各回独立ということにする。

では, このとき何回後にくじがあたるかどうかわかるかい?

幸子: 期待値の問題ね。

中島: そうさ。n 回後に初めて当たる確率は $(1-p)^{n-1} \times p$ だろ。だから, 初めて当たりくじを引く回数の期待値を E とおくと,

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p \tag{5.1}$$

となる。

幸弥: そうかそうか。でもこの計算はどうするんだろ。

中島: これは, 無限級数の和を求めなければならないので, まず,

$$E_N = \sum_{n=1}^{N} n(1-p)^{n-1}p$$

とおいて E_N を求めておき, $E = \lim_{N\to\infty} E_N$ から求めるんだ。

幸弥: どうするんだろ?

中島: いいか, 一般に $S_N = \sum_{n=1}^{N} nr^{n-1}$ $(-1 < r < 1)$ とおくと,

$$\begin{aligned} S_N &= 1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots\cdots + Nr^{N-1} \\ rS_N &= \qquad r + 2r^2 + 3r^3 + 4r^4 + \cdots\cdots + Nr^N \end{aligned}$$

の辺々を引いて,

$$\begin{aligned} (1-r)S_N &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdots + r^{N-1} - Nr^N \\ &= \frac{1-r^N}{1-r} - Nr^N \\ \therefore \quad S_N &= \frac{1-r^N}{(1-r)^2} - \frac{1}{1-r}Nr^N \end{aligned}$$

ここで, $|\,r\,| < 1$ のとき $\lim_{N\to\infty} Nr^N = 0$ であることを用いると,

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \frac{1}{(1-r)^2}$$

となる。この結果を用いると,

$$\begin{aligned} E &= \lim_{N\to\infty} p\sum_{n=1}^{N} n(1-p)^{n-1} = p \cdot \frac{1}{\{1-(1-p)\}^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

となる。まずは, この結果を覚えておくこと。

幸子: ええと, 例えば, さいころを 1 の目が出るまで投げ続けるとき, 平均すると何回投げることになるかというと, この場合は $p = \dfrac{1}{6}$ だから,

$$E = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \text{ (回)}$$

ということになるのね。

中島: そうさ。じゃあ, ロト 6 を 1 枚だけ書いたとき, 1 等が当たる確率は知っているかい?

幸弥: 知らないけど, たしかこの用紙の裏に書いてありますよ。

中島: ${}_{43}\mathrm{C}_6 = 6096454$ 通りの書き方があって, これらが等確率で選ばれるとすると当然 1 等が当たる確率は,

$$p = \frac{1}{6096454}$$

したがって, 1 等が当たるまでロト 6 を続ける回数は, 6096454 回ということになる。

幸子: 6096454 回?

中島: そうだよ。これって, 毎週 2 回買い続け, 年間 50 週分として数えると, 当たるまでに 60964.54 年を要するということになる。つまり, いつころ 1 等が当たるかというと, 約 6 万年後ということになる。そんなに待ったらまた地球上は氷河期になっちゃうぜ。

幸子: それ以前にそんなに生きてられない!!

幸弥: $\cdots$

中島: もちろん, 1 回に 10 種類ずつ買えば, 当たるまでの年数は $\dfrac{1}{10}$ になる。その場合, 1 等が当たるまで 6000 年。

幸子: そうか。じゃあ, 100 種類ずつ買えば, 当たるまで 600 年を要し, 1000 種類ずつ買えば平均すると 60 年後に当たることになるのね。これなら生きているうちに当たりそうだわ。

幸弥: 1 回に 1000 通りも買えないよ。それって 1 回に 20 万円使うことになるよ。それも週に 2 回だし。

幸子: 塗るのも大変ね。

中島: そうさ。それから,「連続した番号がまだ出ていない! 」と言って,

$$\boxed{01}\ \boxed{02}\ \boxed{03}\ \boxed{04}\ \boxed{05}\ \boxed{06}$$
$$\vdots$$
$$\boxed{38}\ \boxed{39}\ \boxed{40}\ \boxed{41}\ \boxed{42}\ \boxed{43}$$

の 38 通りを毎週買い続けたところで, 1600 年かかるのさ。

幸弥: でも, 6 個の連番ってまだ出たことないんだよ。そのうち出るんじゃないの?

[中島君はおなかを抱えて笑っています。]

中島: (笑いながら) その考えはさ, やばすぎーる。やばすぎらー! やばすぎれすと!!

幸子: それって, やばすぎるの比較級と最上級ですね。

中島: そうそう。ところで, 君君! 君は騙されやすいからこれから注意して生きていけよ。あのさ, 次の 2 つのくじがある。

$\boxed{\text{くじ 1}}$

箱の中に 1 〜 100 までの数字が書かれた紙がそれぞれ 1 枚ずつある。ここから 1 枚を取り出す。そして, 後で当選番号を発表する。当選番号と一致すれば当たりとする。当選番号は 1 〜 100 までの数字が等確率で選ばれる。

$\boxed{\text{くじ 2}}$

1 〜 100 までの数字から 1 つ選びその番号のくじを買う。そして, 後で当選番号を発表してその番号と一致すれば当たりとする。ただし, 当選番号は 1 〜 100 までの数字が等確率で選ばれる。

幸子: 「くじ 1」と「くじ 2」の違いは, くじの番号を自分で選べないのと選べるのの違いね。

中島: そうさ。それで, 大切なことは, 当選番号を無作為に決めている場合は

「くじ 1」の場合も「くじ 2」の場合もくじに当たる確率は同じ

ということさ。

幸弥: えー! そうなんですか?

中島: そうさ。自分で選ぶといかにも当たりやすいような気がするかもしれないが, 相手が無作為に当選番号を決めている限り, 自分で考えて選んでも当たる確率は少しも変わらないってことさ。

「自分で考えて選べば当たる確率は高まる」と誤解している人が多くてね〜。そういう幸せな人って多いんだよ。

幸子: じゃあ, 相手が無作為に当選番号を決めていなければどうなんですか?

中島: それは, どういう決め方をしているかの情報をもっている人が強い。え? でもそのくじは無作為に決めているんじゃないの?

幸弥: たぶん無作為だと思いますが。

中島: 無作為でないのなら, 必要な情報をもたずにやるのは損だぜ。

[そのとき, 他校の女子高生がやってきました。第 1 話のときに中島君と話をしていた森川さんです。]

森川: 先生! もう来ていたんですか?

中島: ああ, 少し早く着いたんでね。でも, この人達のおかげで退屈しなかったよ。

森川: 先生, この人達誰ですか?

幸子: あ, 幸福高校 3 年の福澤です。

幸弥: ぼくは, 福原です。今, こちらの先生に期待値を教えてもらってました。

森川: あ, 私, 森川といいます。

中島: それじゃ, この間の続きを始めるか。

[森川さんは, 勉強を始める用意をしました。]

幸子: あ, それでは私たちこれで失礼します。

★ ★

幸弥君と幸子さんは, 森川さんの勉強の邪魔にならないようにと考えてファミレスを出ました。幸子さんは, ファミレスを出た幸弥君がさぞかし落ち込んでいるだろうと思っていましたが, 予想に反してにこにこしていました。そこで, 幸子さんはかえって気になって幸弥君に話しかけました。

★ ★

幸子: ねえ, さっきの話理解した?

幸弥: うん。

幸子: 毎回, 1 種類ずつ買ったのでは, 当たるまで 6 万年かかるのよ。

幸弥: うん。

幸子: それに, 特定の連番を買い続けても, 無作為に数字を書いても当たる確率は変わらないのよ。

幸弥: うん。

幸子: じゃあ, もう買わないの。

幸弥: いや, 買ってみるよ。

幸子: え? なんで?

幸弥: だってさ, もしも当たったら 6 万年かかるものを手に入れたことになるんだよ。**6 万年の夢**を手に入れたことになるってことでしょ。そうなったら, 僕は幸せだなー。

[幸子さんはあきれてしまいました。]

幸子: ええ, 本当に幸せね。

幸せ物語 2011 第 5 話　おわり　(絵 ・ 月邸　沙夜)