幸せ物語 2011
第 1 話　幸せなスタート

無知であることは, しばしば人を「幸せ」な状態にします。できたと思っても実は全くできていない, でも本人はそれを全く知らない, あるいは勉強が捗っていると思っているが実はぜんぜん進んでいない, そんな状態の人を「幸せな人」と定義しましょう。これから, そんな幸せな人の物語が始まります。

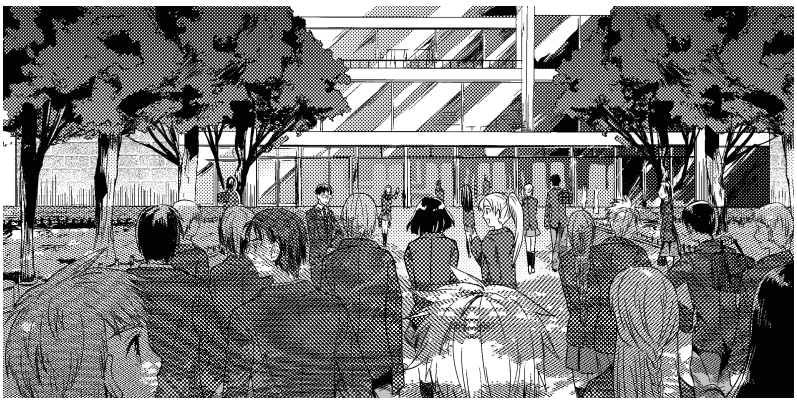
****

4 月から受験までは, まだ 1 年の $\frac{3}{4}$ 以上残しており, これは長期戦の学習です。このような場合, 勉強の要領よりも数学に対する向かい方, 学習姿勢が大切です。特に数学の場合は,

「よくわからない」→「とりあえず解法を覚えよう」

などのものは, 長期的には欠陥が多くあります。みなさんは, 今回の幸弥君のように「幸せな人」になっていませんか?

****



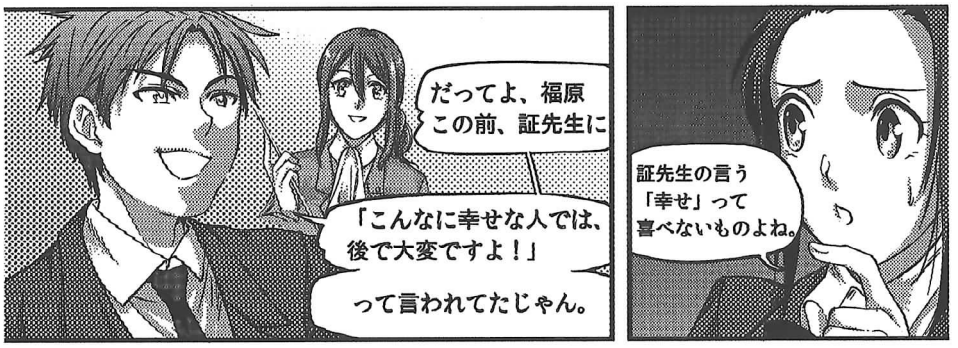
新学期が始まって, 1 週間が経ちました。

朝の登校時間中に校門のあたりで幸子さんが幸弥君を見つけました。

★　　★

おはよう、幸弥！
あ、おはよう。あのさ、幸子はもう新校舎に慣れた？
まあまあね。何かあったの？
いやー。新しく多目的ホールのようなものができたけど行ってみた？
え？いや、まだだけど。何かあるの？
最初気がつかなかったけど、何か天井が変わっていてね。
どんなふうに？
なんか丸い感じ。
???
まぁ、今度行ってみてよ。僕も、まだ校舎に慣れていなくて全部は把握していないんだ。
さあ、校舎も新しくなったんだし、そろそろ心機一転で頑張らなきゃなー。しっかり勉強して、東大でも目指してみるか！

おー。
それは
楽しみだな。
ポン
福原がどん底から
どれだけ伸びるか
楽しみだぜ！
あ、
太成くん。
まあ、見ててよ。
頑張るから。
高２までちょっと
遊びすぎたんで。
幸弥、太成君は
嫌味を言って
いるのよ。
どうなの？
ガクッ


だってよ、福原
この前、証先生に
「こんなに幸せな人では、
後で大変ですよ！」
って言われてたじゃん。
証先生の言う
「幸せ」って
喜べないものよね。

で、幸弥、
何を言われていたの？
ヒョイ

太成: 円の話だよな。方程式 $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ は xy 平面上で原点を中心とする半径 r の円を表す。そして, $\cdots$

幸弥: あ, 思い出した。そこで, $x^2 + y^2 = x$ が何を表すかと証先生に聞かれたんで, 原点を中心とする半径 $\sqrt{x}$ の円と答えたんだよ。

[幸子さんは幸弥の話を聞いて固まってしまいました。]

太成: その様子じゃ福原, もしかしてまだわかっていないのか? 未だに定数と変数の区別がついていないんだな (笑)。まだまだ幸せなやつだな。ははは一。

幸弥: うん, まあ。まだかな。

幸子: ((幸弥! そんなにのんきでいいの!))

太成: それから, 数列の授業のときによ, $n = 1, 2, 3, \cdots$ で $a_{n+1} = a_n + d$ (d は定数) が成り立つ数列, つまり等差数列の一般項が,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

で与えられることを何とか覚えたらしいが, 調子にのって

$$a_{n+1} = a_n + n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で与えられる数列の一般項を

$$a_n = a_1 + (n-1)n$$

ってやってたもんな!

幸弥: 違うの!

幸子: ((ガクッ。幸せすぎてフォローできない!))

太成: あたりめーだろーが!

[太成君は付き合いきれないという態度で, さっさと先に教室の方に行ってしまいました。続いて, 月里君が声をかけてきました。]

月里: おはよう, 幸弥。その様子は, また, 太成君にからかわれていたようだね。

幸弥: そうなのかな。

幸子: そうでしょ! だって, $\cdots$

[そのとき, 日向さんが幸子さんに声をかけて来ました。]

日向: おはよう。幸子。

幸子: あ! おはよう。···

[幸子さんは日向さんと先に行ってしまいました。この間に幸弥君は月里君に先ほどのことを説明しました。]

月里: うーん。それは僕もよくわからなくて ·····

[そのとき, 幸弥君と月里君の左側を伊達君が通りかかりました。]

幸弥: お, 伊達君だ。

[幸弥君は伊達君に向かって手を振りましたが, 伊達君は気がつかないようで先に行ってしまいました。]

幸弥: 無視かよ。

月里: 伊達君ってきっと何か考え事をしているときって, 目に入らなくなるんだよ。たぶんね。

★ ★

5 時間目の数学の時間になりました。幸福高校では, 理系の 3 年生は数学 III, C の授業があわせて週に 5 時間あり, これ以外に数学演習という数学 IAIIB の復習をする授業が週に 2 時間設けられています。証先生が担任を受け持つ 3 年 4 組の場合は証先生が両方の授業を担当します。

5 時間目の数学の授業は数学演習の授業です。今日は場合の数の演習です。

★ ★

証先生: まず, 基本的なことを確認しましょう。
A, B, C, D, E, F を一列に並べる並べ方は何通りですか?

幸子: $6! = 720$ (通り) です。

証先生: はい, そうです。では, A, A, B, C, D, E を一列に並べる並べ方は何通りですか?

月里: ええと A が 2 個あるから

$$\frac{6!}{2!} = 360 \text{ (通り)}$$

です。

証先生: はい。そのとおりですね。でも, 何で 2 で割るのでしょう?

木田: (ボソッと) そんなこと覚えておけばいいのさ。

日向: ええと, たしか, まず, 2 つの A を区別して

$$A_1, A_2, B, C, D, E$$

を並べると考える。この 6 個の文字の並べ方は,

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

だけある。でも, この 720 通りというのは, 例えば

$$A_1, A_2, B, C, D, E$$

と並べたものと

$$A_2, A_1, B, C, D, E$$

と並べたものを区別して数えている。

幸子: つまり, 本当は同じものなのに「別の並べ方」と思って考えての 720 通りなのよね。

日向: うん。だから 720 通りを 2 で割るのよね。

証先生: はい, そうですね。2 で割る理由がわかりましたか。

幸弥: はーい。

証先生: 福原君, 元気な返事ですね。では, A, A, A, B, C, D を一列に並べる方法は何通りですか?

幸弥: それは, 6! を 3 で割るんじゃないですか?

[証先生は自分の耳を疑ったような表情になりました。]

証先生: え? 今, 「3」っていいましたか?

幸子: (小声で) 幸弥, 3! でしょ。

[それを聞いて, 幸弥君はあわてて言い直しました。]

幸弥: あ, あの 3 じゃなくて 3! です。

[証先生は少しホッとした表情になりました。]

証先生: そうですね。例えば, 3 つの A を区別して A_1, A_2, A_3 とするとき,

A_1, B, A_2, A_3, C, D
A_1, B, A_3, A_2, C, D
A_2, B, A_1, A_3, C, D
A_2, B, A_3, A_1, C, D
A_3, B, A_1, A_2, C, D
A_3, B, A_2, A_1, C, D

は異なる並べ方ですが, 添え字をとって A_1, A_2, A_3 をすべて A にしてしまえばこの 6 通りは同じものです。このように, 6 個の異なる文字 A_1, A_2, A_3, B, C, D の並べ方は $6! = 720$ 通りのうち 6 通りずつが一通りに数え上げられるので 6 で割ります。

木田: (ボソッと) そんなの同じ文字が 3 個あれば 3! で割ると覚えればいいのさ。理由なんていちいち考えてられるかよ。

証先生: それでは, A, A, A, B, C, D, E から 4 個選んで並べる並べ方は何通りでしょうか。

幸弥: うーん。7 個から 4 個選んで並べるときは $7 \times 6 \times 5 \times 4$ だし, A が 3 個あるから 3! で割るんじゃないのかな?

木田: (ボソッと) そうさ, だから $\cdots$

幸弥: だから,

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{3!} = 7 \times 5 \times 4 = 140 \text{ (通り)}$$

じゃないですか。

[これを聞いて太成は勝ち誇った表情を見せています。伊達君はこの間無表情です。]

証先生: 福原君。先ほど $3! = 6$ で割る理由はなんでしたっけ?

幸弥: えー。それは, 6 通りずつ重複するからですよね。

証先生: どういう 6 通りですか?

幸弥: えーと。A_1, A_2, A_3 の位置を入れ換えた分だったかな。

証先生: ええ, そうですよ。では, 例えば,

$$\mathrm{A,\ A,\ A,\ B}$$

の場合は, 3 つの A を区別した場合,

$$\begin{array}{lll} \mathrm{A_1,\ A_2,\ A_3,\ B} & \mathrm{A_1,\ A_3,\ A_2,\ B} & \mathrm{A_2,\ A_1,\ A_3,\ B} \\ \mathrm{A_2,\ A_3,\ A_1,\ B} & \mathrm{A_3,\ A_1,\ A_2,\ B} & \mathrm{A_3,\ A_2,\ A_1,\ B} \end{array}$$

があって, この 6 通りが 1 通りに数えられます。

幸弥: はい。

証先生: でも, A, B, C, D の場合は,

$$\mathrm{A_1,\ B,\ C,\ D} \qquad \mathrm{A_2,\ B,\ C,\ D} \qquad \mathrm{A_3,\ B,\ C,\ D}$$

この 3 通りしか $\cdots$

月里: あ, 3 通りしか重複しない。ということは 6 で割ってはだめでは?

証先生: そうですね。

幸弥: じゃあ, 何で割ればいいのかなあ。

幸子: えー。無理じゃない。

幸弥: 3 と 6 の平均を取って, $\dfrac{3+6}{2} = \dfrac{9}{2}$ じゃないかな。

太成: (思わず声を出して笑って) ははは っ。おまえ幸せすぎだぜー。

幸弥: え? 違うの。

幸子: 幸弥! だって, 6 で割るときと 3 で割るときがあるんだから, 「○○の場合は 3 で割って, ○○の場合は 6 で割る」というやりかたなんじゃないの。

証先生: 福澤さんの通りですね。ただ, 3 で割る場合はないのですがね。このように求めるとよいのです。

- A を 3 個含む場合は, まず残りの 1 文字を B, C, D, E から選ぶ。これは, 4 通りです。

  そして, 例えば, A, A, A, B を並べる場合は $\dfrac{4!}{3!} = 4$ 通りだけあるので, (A を 3 個含む順列は)

$$4 \times 4 = 16 \text{ (通り)}$$

- A を 2 個含む場合は, 残りの 2 文字の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り。そして, 例えば, A, A, B, C の並べ方は $\dfrac{4!}{2!} = 12$ 通りなので, 全部で,

$$6 \times 12 = 72 \text{ (通り)}$$

- A を 1 個以下含む場合は, A, B, C, D, E から 4 文字を選んで並べる場合ですから,

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \text{ (通り)}$$

したがって, 求める場合の数は,

$$16 + 72 + 120 = 208 \text{ (通り)} \qquad \cdots\cdots \text{(答)}$$

となります。

幸弥: なるほど。

[この間, 木田君はつまらなそうな顔をしていました。続いて, 証先生全員の方を向いて言いました。]

証先生: 皆さん。3 年生の授業はまだ始まったばかりですが, これからの長い期間の勉強において大切なことは何でしょうか。

幸弥: まじめにやるー。

幸子: そんなのあたりまえじゃない!

証先生: それはですね, **きちんと理解して学習を積み重ねる**ということです。先ほどのように, よく理解していないで「こういう場合はこうする」ばかりだと, 間違った使い方をすることがあります。そうなると自分ではできたと思っていても, 実は全然できていない「幸せな人」になってしまいますよ。

太成: なーるほど。福原は**幸せなスタート**をきったということか。これゃいい。ははは一。

幸子: (小声で) 幸弥! 太成君にあんなこと言わせていいの!

幸弥: うん。僕は全然気にならない。だって事実だし。

[幸子さんは手で顔を覆い, 顔を左右に振りました。]

証先生: ところで福原君。今の時間は数学の問題を解く演習の時間ですよね。問題演習のときに, 大切なことは何でしょう?

[太成君は頭の中で考えていました。]

太成: ((俺の場合は, 俺がいかに優秀かってことを確認するということだな。ふふふ))

[幸弥君は何と答えていいかわからず]

幸弥: えーと。

証先生: 問題演習のときはですね, もちろん問題があらかじめ解けないよりは解けた方がよいのですが, それよりも, **次回同じ問題が出たときに解けるようにする**に終わらせるということが大切なんです。

月里: ふぅーん。

証先生: 例えば,

- どのような知識がなければこの問題は解けなかったのか。そのような知識をしっかりと確保しておく。
- 何に気がつけば, この解法にたどり着くのか。「このような設定の場合はこう考えよう」というものを自分なりに考えておく。

このようなことが大切なんですよ。これからの問題演習の時間にはそう考えて授業に参加するようにしてくださいね。

★ ★

証先生がそう言い終えると, チャイムが鳴り授業が終わりました。

★ ★

放課後, 幸弥君と幸子さんは夏休みの相談をするため, 駅の改札の向かいにあるファミレスのジョニーズに入っていました。

★ ★

幸子: それでさぁ。夏休みどうする気なの? みんな講習行くって言うし。

幸弥: えー。そうなの。学校の勉強だけじゃだめなの?

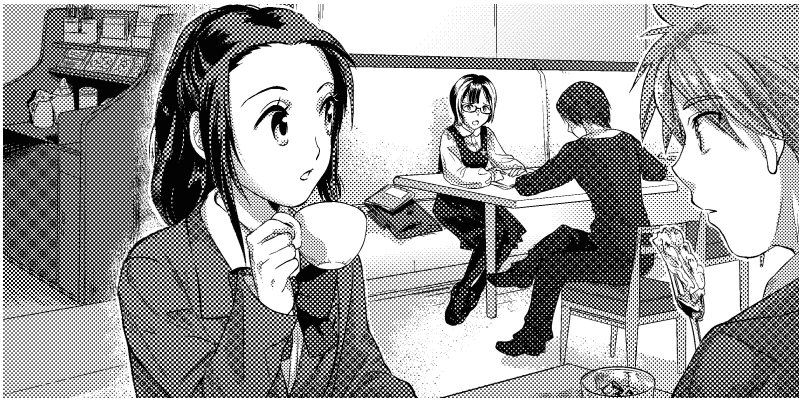
幸子: うーん。どうなのかな。でも, 他の学校の人どのくらいできるか気にならない?

[そのとき, 近くの席で大学生が高校生の勉強を教えている声が聞こえました。大学生は, 中島勝也君という人で高校生は森川真実子さんという人でした。]

中島: だからさー, この「解の配置問題」っていうのは東大が大好きな問題なんだから, 絶対にできるようになっておかないと · · ·

森川: 先生ー。これ, また覚えなきゃだめなんですかー。

中島: そうさ。とにかく覚える!



[これを幸弥君と幸子さんは聞いていました。]

幸弥: ファミレスで教えてもらっているのか。

幸子: でも, なんか, 証先生と違うこと言っていない?

幸弥: 「覚えろー」っていうところがね。まあ, ちょっと聞こえただけだからよくわからないけど。

幸子: いいなあ。私も大学とかに直接教えてもらいたい。

[そのとき, 中島君がちらっと幸子さんを見て, 一瞬目が合いました。幸子さんはあわてて目をそらしました。]

幸子: (ブルッ) さあ, 夏休みどうするか相談しようよ。

幸弥: 僕は, まず証先生に幸せな人って呼ばれないことが目標かな。

★ ★

2 人はこのような調子でしばらくファミレスの中で話を続けていました。

幸せ物語 2011 第 1 話　おわり　(絵 ・ 月邸　沙夜)