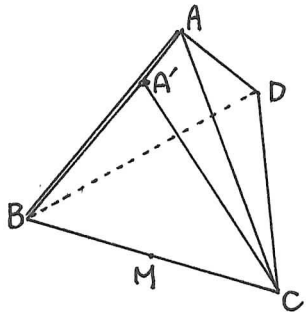
【第 2 問】

空間内に 4 点 A, B, C, D があり, どの 2 点間の距離も 1 である。また, 3 点 B, C, D を含む平面を π とし, A から π へおろした垂線の足を H とする。

半径の $r\ (>0)$ の球 S の中心は, 最初, 線分 AH 上にあり, S はつねに π に接しながら線分 AB, AC, AD に触れずに四面体の外部に移動できるという。

このような r の取り得る値の範囲を求めよ。

解答



辺 BC の中点を M とし, M を通り MH に垂直な平面を α とする. 三角形 ABC を α に正射影した三角形を $\triangle \mathrm{A'BC}$, S を正射影した円を C とし, さらに C の半径を R とする.

このとき, $r < R$ である.

AH の長さを求めると $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となるので

$$\triangle \mathrm{A'BC} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\mathrm{A'B} = \sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{\sqrt{33}}{6}$$

したがって

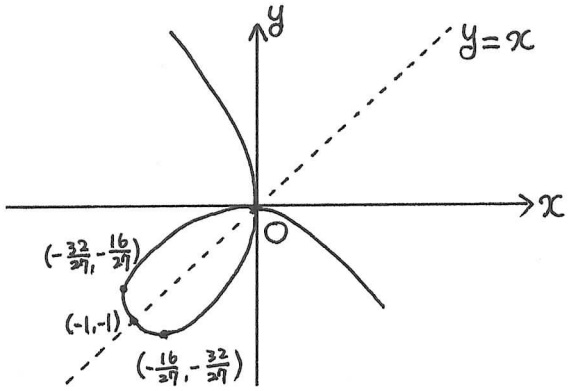
$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{33}}{6} + \frac{\sqrt{33}}{6}\right) R = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \quad R = \frac{\sqrt{6}}{3+\sqrt{33}} = \frac{\sqrt{22}-\sqrt{6}}{8} \qquad \cdots\cdots (答)$$

また,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$$

である. C が直線 $y = x$ に関して対称であることも考えて, C の概形は次のようになる.



(3) 囲む面積を S とおくと, 囲む部分が直線 $y = x$ に関して対称であることも考えて, まず $y = x$ より下側の部分の面積を求める.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}S &= \int_0^1 -y\frac{dx}{dt}\,dt - \frac{1}{2} \\
&= \int_0^1 -(t-1)(t+1)^2\{-(t-1)(3t+1)\}\,dt - \frac{1}{2} \\
&= \int_0^1 (t-1)^2(t+1)^2(3t+1)\,dt - \frac{1}{2} \\
&= \int_0^1 (3t^5 + t^4 - 6t^3 - 2t^2 + 3t + 1)\,dt - \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + 1\right) - \frac{1}{2} \\
&= \frac{16}{30}
\end{aligned}$$

したがって,

$$S = \frac{16}{15} \qquad \cdots\cdots (答)$$

である.

である．これを用いると，

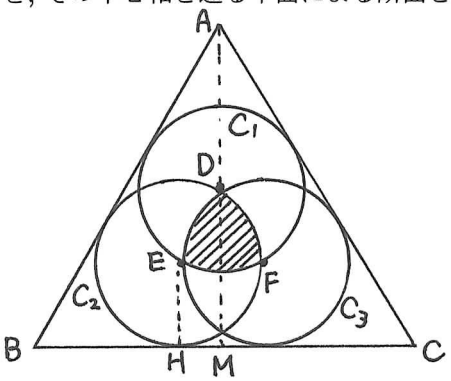
$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{\infty} kp_k &= \sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)p_{2l+1} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\cdot\frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{l-1} \\ &= \frac{1}{18}\left\{2\sum_{l=1}^{\infty} l\left(\frac{17}{18}\right)^{l-1} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{17}{18}\right)^{l-1}\right\} \\ &= \frac{1}{18}\left\{2\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{17}{18}\right)^2} + 1\cdot\frac{1}{1-\frac{17}{18}}\right\} = 37 \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

【第 5 問】

底面の半径 $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$, 高さ $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$ の円すい K の内部に, 半径 1 の球体 S と動点 P がある。P は S の外部を自由に動く。

K が円すいの内部を動くとき, P が K 内で通過し得ない領域の体積を求めよ。

解答　P が K 内で通過し得ない領域とは, つねに S によって占拠されている部分である．これは, K を, その中心軸を通る平面による断面を描くと次のようになる．



底円の半径と高さの比が $1:\sqrt{3}$ であるから △ABC は正三角形である．また, 図の中の 3 つの円 C_1, C_2, C_3 の中心をそれぞれ D,E,F とし, E から辺 BC におろした垂線の足を H, BC の中心を M とすると

$$\mathrm{EH}=1 \text{ より } \mathrm{BH}=\sqrt{3}$$

よって E と AM の距離は $\frac{1}{2}$ になるので $\mathrm{EF}=1$ となる．同様に $\mathrm{DE}=\mathrm{DF}=1$ になるから C_1, C_2, C_3 それぞれ他の円の中心を通り, つねに S に含まれる部分は図の